



UNIVERSITÉ DU QUÉBEC EN ABITIBI-TÉMISCAMINGUE

CONTRÔLE LINÉAIRE ET NON-LINÉAIRE
D'UN BRAS FLEXIBLE

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN INGÉNIERIE

PAR

PATRICK JODOUIN

MARS, 2014



Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue
Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue

Mise en garde

La bibliothèque du Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue et de l'Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue a obtenu l'autorisation de l'auteur de ce document afin de diffuser, dans un but non lucratif, une copie de son œuvre dans Depositum, site d'archives numériques, gratuit et accessible à tous.

L'auteur conserve néanmoins ses droits de propriété intellectuelle, dont son droit d'auteur, sur cette œuvre. Il est donc interdit de reproduire ou de publier en totalité ou en partie ce document sans l'autorisation de l'auteur.

Warning

The library of the Cégep de l'Abitibi-Témiscamingue and the Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue obtained the permission of the author to use a copy of this document for non-profit purposes in order to put it in the open archives Depositum, which is free and accessible to all.

The author retains ownership of the copyright on this document. Neither the whole document, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

REMERCIEMENTS

J'aimerais remercier d'abord mon frère Marc-André et ma mère Sylvie, pour leur soutien inconditionnel et leur patience. J'aimerais ensuite remercier mon directeur de maîtrise, Mohamad, pour son soutien exemplaire et pour m'avoir bien guidé tout au long de cette aventure. J'aimerais remercier les professeurs et l'institution de l'UQAT pour m'avoir bien encadré et documenté pour atteindre mes objectifs. J'aimerais finalement remercier mes amis qui ont su me soutenir et m'aider à garder le cap pour boucler le tout.

TABLE DES MATIÈRES

<i>Introduction.....</i>	<i>1</i>
<i>Chapitre 1 Montage physique.....</i>	<i>3</i>
1.1. Composants du module	4
1.2. Système d'acquisition	5
1.3. Modules SimuLink	6
<i>Chapitre 2 Modèle mathématique.....</i>	<i>8</i>
2.1. Modèle simplifié.....	8
2.1.1. Partie mécanique.....	9
2.1.2. Partie électrique	12
2.1.3. Modèle d'état.....	14
2.1.4. Fonction de transfert	16
2.1.5. Zéros et pôles	17
2.2. Modèle par modes supposés.....	17
2.2.1. Équations de Lagrange.....	18
2.2.2. Modèle d'état.....	21
2.2.3. Fonction de transfert	22
2.2.4. Zéros et pôles	22
2.3. Modèle non-linéaire.....	23
<i>Chapitre 3 Méthode LQG/LTR</i>	<i>26</i>
3.1. Design du contrôleur	26
3.2. Simulations et expérimentation	29
3.3. Analyse des résultats	32
<i>Chapitre 4 Placement de pôles</i>	<i>34</i>
4.1. Design de l'observateur d'état	34
4.2. Design du correcteur par retour d'état	35
4.3. Simulations	36
4.4. Expérimentation	38
4.5. Analyse	40
<i>Chapitre 5 Paramétrisation de Youla.....</i>	<i>41</i>
5.1. Design du correcteur.....	41
5.2. Simulation.....	45

5.3.	Expérimentation	46
5.4.	Analyse des résultats	47
<i>Chapitre 6 Méthode H infini</i>		48
6.1.	Design du correcteur.....	49
6.2.	Simulation.....	52
6.3.	Expérimentation	53
6.4.	Analyse des résultats	54
<i>Chapitre 7 Méthode de passivité</i>		56
7.1.	Design du correcteur.....	57
7.2.	Simulations	59
7.3.	Expérimentation	60
7.4.	Analyse des résultats	61
<i>Chapitre 8 Contrôle non-linéaire</i>		63
8.1.	Définition des points d'équilibre.....	63
8.2.	Nature des points d'équilibre	64
8.3.	Étude de la dynamique interne	65
8.4.	Forme normale.....	66
8.5.	Dynamique des zéros.....	69
8.6.	Fonction de Lyapunov assignable	69
8.7.	Simulations et analyse des résultats	71
8.8.	Résultats expérimentaux.....	74
8.9.	Analyse des résultats	76
<i>Chapitre 9 Comparaison des méthodes</i>		77
9.1	Temps de réponse	78
9.2	Dépassement.....	78
9.3	Erreur en régime permanent	78
9.4	Stabilité en régime permanent	78
9.5	Résumé	78
<i>Conclusion</i>		80
<i>Références</i>		81

. LISTE DES FIGURES

FIGURE 1: MONTAGE PRATIQUE	3
FIGURE 2: COMPOSANTS DU MONTAGE	4
FIGURE 3: CARTE D'ACQUISITION ET AMPLIFICATEUR	5
FIGURE 4: BLOCS DE QUARC.....	6
FIGURE 5: MODÈLE QUANSER.....	9
FIGURE 6: MODÈLE DU SERVOMOTEUR	12
FIGURE 7: RÉSULTATS DE L'IDENTIFICATION.....	16
FIGURE 8: PARAMÈTRES DE LA MEMBRURE FLEXIBLE	19
FIGURE 9: MODÈLES SIMULÉS	23
FIGURE 10: MONTAGE SIMULATION - LQG/LTR	29
FIGURE 11: MONTAGE PRATIQUE - LQG/LTR	29
FIGURE 12: RÉSULTATS SIMULATION - LQG/LTR	30
FIGURE 13: RÉSULTATS PRATIQUE - LQG/LTR	31
FIGURE 14: ROBUSTESSE SIMULATION LQG/LTR	32
FIGURE 15: MONTAGE SIMULATION - RETOUR D'ÉTAT.....	37
FIGURE 16: SIMULATION DE L'OBSERVATEUR D'ÉTAT.....	37
FIGURE 17: RÉSULTATS SIMULATION - RETOUR D'ÉTAT.....	38
FIGURE 18: MONTAGE PRATIQUE - RETOUR D'ÉTAT.....	39
FIGURE 19: RÉSULTATS PRATIQUE - RETOUR D'ÉTAT	39
FIGURE 20: SCHÉMA PARAMÉTRISATION DE YOULA	42
FIGURE 21: MONTAGE SIMULATION - YOULA	45
FIGURE 22: RÉSULTATS SIMULATION - YOULA.....	45
FIGURE 23: MONTAGE PRATIQUE - YOULA	46
FIGURE 24: RÉSULTATS PRATIQUE - YOULA.....	46
FIGURE 25: SCHÉMA H-INFINI.....	48
FIGURE 26: MONTAGE SIMULATION - H-INFINI	49

FIGURE 27: RÉSULTATS SIMULATION - H-INFINI	53
FIGURE 28: MONTAGE PRATIQUE - H-INFINI	53
FIGURE 29: RÉSULTATS PRATIQUE - H-INFINI.....	54
FIGURE 30: SCHÉMA PASSIVITÉ.....	57
FIGURE 31: DIAGRAMME DE NYQUIST DU MODÈLE SIMPLIFIÉ	58
FIGURE 32: MONTAGE SIMULATION - PASSIVITÉ	59
FIGURE 33: RÉSULTATS SIMULATION - PASSIVITÉ	60
FIGURE 34: MONTAGE PRATIQUE - PASSIVITÉ	60
FIGURE 35: RÉSULTATS PRATIQUE - PASSIVITÉ	61
FIGURE 36: RÉSULTATS SIMULATION MODÈLE NON-LINÉAIRE.....	72
FIGURE 37: MONTAGE SIMULATION - LYAPUNOV	73
FIGURE 38: RÉSULTATS SIMULATION - LYAPUNOV	74
FIGURE 39: MONTAGE PRATIQUE - LYAPUNOV	74
FIGURE 40: RÉSULTATS PRATIQUE - LYAPUNOV	75
FIGURE 41: RÉSULTATS PRATIQUE AVEC TOUS LES CONTRÔLEURS	77

LISTE DES TABLEAUX

TABEAU 1: PARAMÈTRES DU BRAS FLEXIBLE	7
TABEAU 2: PARAMÈTRES DU SYSTÈME.....	15
TABEAU 3: PERFORMANCES DES CORRECTEURS ÉTUDIÉS	79

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, il est question de la modélisation et du contrôle d'un manipulateur flexible à un degré de liberté. Il est modélisé à l'aide de trois méthodes; d'abord en simplifiant la flexibilité de la membrure en un ressort linéaire, ensuite en utilisant la méthode de Lagrange et celle des modes supposés, mais en négligeant les termes non-linéaires. Finalement, le modèle précédent avec les termes non-linéaires est aussi étudié. Après l'analyse de ces modèles, différentes méthodes de contrôle sont appliquées. D'abord, des méthodes classiques sont employées, soit le placement de pôles ainsi que la méthode "Linear Quadratic Gaussian with Loop Transfer Recovery" (LQG/LTR). Ensuite, on applique d'autres méthodes plus récentes, soit le contrôle H_∞ , la paramétrisation de Youla et la théorie de la passivité. Par la suite, pour contrôler le système à l'aide du modèle non-linéaire, une fonction de Lyapunov assignable est utilisée. Les contrôleurs sont testés sur un module expérimental les uns après les autres; les résultats théoriques et pratiques sont comparés, puis les méthodes sont comparées entre elles. Des conclusions et des ouvertures sont finalement indiquées.

ABSTRACT

In this master's report, a one degree of freedom flexible manipulator is modeled and controlled. It will first be represented by three mathematical models: first, the beam flexibility will be simplified as a linear spring, then another linear model will be obtained using Lagrange method and Assumed Modes Method, but neglecting the nonlinear terms. Finally, a nonlinear model will be obtained with Lagrange method and Assumed Modes Method, but without neglecting the nonlinearities. After analyzing those models, several control methods are applied. First, classic methods are used, such as pole placement and Linear Quadratic Gaussian with Loop Transfer Recovery (LQG/LTR). Then, more recent methods are applied, as the H_∞ control method, the Youla parameterization and the passivity theory. The nonlinear model is then used to obtain a controllable Lyapunov function, which gives a nonlinear controller. All these controllers are tested on an experimental flexible link; the simulation and practical results are compared. The methods are then compared with one another. Finally, conclusions and openings are stated.

LISTE DES VARIABLES

A	Aire d'une section de la membrure
B_{eq}	Coefficient d'amortissement interne du moteur
B_l	Coefficient d'amortissement interne du bras
E	Module d'Young de la membrure
E_m	Force contre électromotrice
e	Erreur sur les variables d'état
I_m	Courant d'armature du moteur
I_z	Moment d'aire de la membrure
J_{eq}	Inertie équivalente du moteur
J_L	Inertie de la membrure
K_{stiff}	Coefficient de rigidité équivalent de la membrure en rotation
K	Correcteur
k_m	Constante du moteur (tension)
k_g	Rapport de réduction des engrenages
k_T	Constante du moteur (courant)
L	Gain de l'observateur d'état / Longueur de la membrure
L_m	Inductance d'armature du moteur
M	Masse de la membrure
p	Pôle du système
R_{dm}	Position d'un élément infinitésimal par rapport au centre de rotation
R_m	Résistance d'armature du moteur
T	Énergie cinétique
t	Temps
U	Entrée du système
V	Énergie potentielle
V_m	Tension d'alimentation du moteur
v	Déplacement perpendiculaire à l'axe neutre de la membrure
Y	Sortie du système
x	États du système
\hat{x}	Variables d'état estimées
α	Déplacement angulaire de l'extrémité du bras (composante flexible)
ξ	Coefficient d'amortissement
η_g	Efficacité des engrenage
η_m	Efficacité du moteur
θ	Position angulaire de l'axe neutre de la membrure
θ_m	Position angulaire du moteur
ρ	Densité linéaire de la membrure
τ_L	Moment de force appliqué par le moteur
ω_n	Fréquence naturelle

INTRODUCTION

Le contrôle de bras robotiques comportant des membrures flexibles est de plus en plus présent dans l'actualité de l'asservissement. En effet, en raison de contraintes ou parfois pour assurer une certaine flexibilité sur la force appliquée à son extrémité, les membrures flexibles sont de plus en plus utilisées. Le Bras Canadien, pour ne citer qu'un exemple, est considéré flexible en raison de sa longueur et de sa faible inertie de section. Le bras flexible est plus difficile à contrôler; dans le cas étudié, on ne mesurera que l'angle de rotation du moteur ainsi que la déformation à la base de la membrure flexible.

Dans la littérature, certaines méthodes classiques ont été appliquées. Le contrôleur PD a été appliqué dans [1] et dans [2], la méthode LQR a été appliquée sur un bras flexible, dans le plan horizontal. Des résultats ont été obtenus. Des méthodes non-linéaires ont aussi été développées dans [3]. La méthode H_∞ et la paramétrisation de Youla ont été développées et simulées dans [4] et dans [5], respectivement.

Le but de ce projet est donc d'appliquer plusieurs méthodes de commande modernes à trois modèles différents du bras flexible; le modèle simplifié, le modèle par modes supposés et le modèle non linéaire. Ensuite, ces méthodes seront appliquées sur un module expérimental comportant un bras flexible à un degré de liberté, commandé dans l'environnement Matlab. Les méthodes qui seront évaluées et comparées dans ce projet sont, d'abord, les méthodes appliquées au modèle linéaire telles que la méthode LQG/LTR, la méthode H-infini, la paramétrisation de Youla, ainsi qu'à titre de référence, le placement de pôles à l'aide d'un retour d'état. Ensuite, la méthode de la fonction de Lyapunov assignable [6] sera appliquée au modèle non-linéaire et au module expérimental.

Pour ce faire, les trois modèles énumérés précédemment seront développés et validés, pour ensuite servir à développer les correcteurs des différentes méthodes. Une fois ces correcteurs conçus, ils seront d'abord simulés pour en ajuster les paramètres une première fois. Ensuite, ils seront appliqués sur le module concret avant d'être ajustés une dernière fois. Finalement, la comparaison des différentes méthodes sera faite et des pistes pour perfectionner les différents correcteurs seront données, à titre de point de départ pour d'éventuelles expériences d'affinement.

CHAPITRE 1

MONTAGE PHYSIQUE

Le montage (figure 1) est composé d'une base sur laquelle est installé un servomoteur. Fixé à son arbre, un ensemble d'engrenages le relie à une membrure flexible en acier. On utilise un capteur de déformation pour mesurer la flexion de la membrure et un potentiomètre pour mesurer la position angulaire du moteur. La commande de ce système se fait par la tension d'alimentation du servomoteur. Dans ce chapitre, les composants du module, le système d'acquisition et finalement les modules SimuLink utilisés pour contrôler le système seront présentés et détaillés.



Figure 1: Montage pratique

Le montage pratique est un module expérimental fabriqué par la compagnie Quanser, nommé SRV02 Flexible Link [7]. C'est un module fourni avec une carte d'acquisition qui s'implante dans un ordinateur pour le contrôler à partir d'une interface SimuLink, un module de Matlab.

1.1. Composants du module

Les composants du système à un bras flexible sont tous illustrés et numérotés à la figure 2.

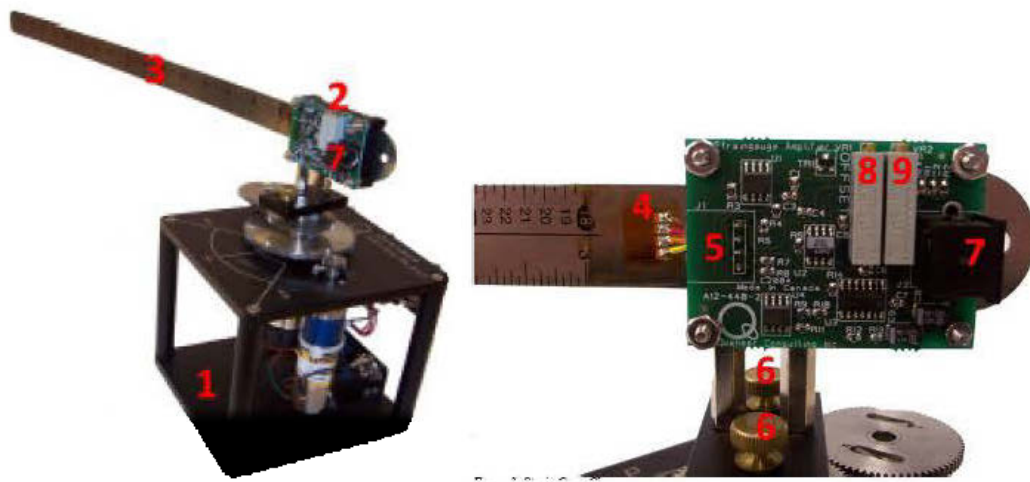


Figure 2: Composants du montage

La base du mécanisme, illustrée par le numéro 1, est un socle métallique sur lequel est monté le servomoteur du système. Ce servomoteur est alimenté par un signal venant de la carte d'acquisition de l'ordinateur et passant par l'amplificateur.

Le second item numéroté à la figure est le module Flexgage, recevant le signal de la jauge de déformation et le transformant avant de le renvoyer à la carte d'acquisition par le port numéroté 7. Ce module est aussi équipé de deux potentiomètres pour ajuster le gain et la valeur initiale du capteur, identifiés par les numéros 8 et 9. La

jauge, quant à elle, est identifiée par le numéro 5, et permet de renvoyer un signal proportionnel à la déflexion de l'extrémité de la membrure flexible.

La membrure flexible, en acier inoxydable, mesure 419 mm et a une masse de 0.065 kg. Elle est suffisamment mince pour qu'elle se déforme lorsque le moteur tourne autour de son axe.

1.2. Système d'acquisition

Le système d'acquisition, recevant les données des capteurs et envoyant le signal d'entrée du système, est composé de la carte d'acquisition de données ainsi que l'amplificateur de puissance, alimentant le module. Ce sont les composantes qui permettent de mesurer l'état des variables du système et d'envoyer le signal de sortie du contrôleur. Ces composants sont illustrés à la figure 3.

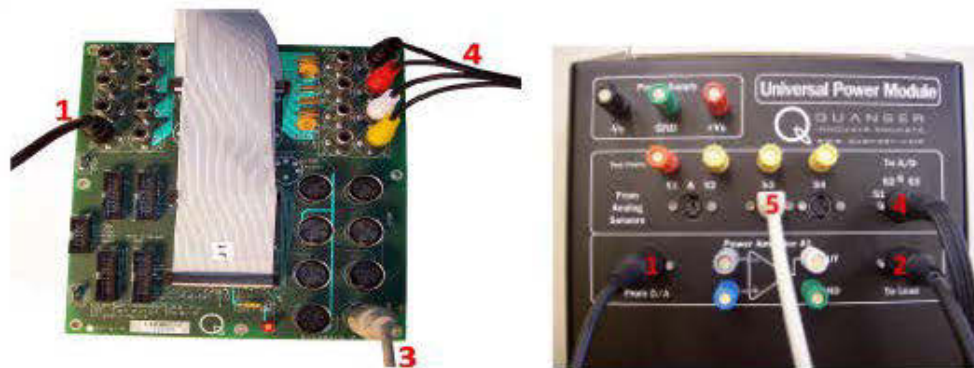


Figure 3: Carte d'acquisition et amplificateur

D'abord, la carte d'acquisition récupère les données de l'encodeur du moteur par le fil no 3. Le signal de la jauge de déformation passe ensuite par le fil no 5 pour être amplifié par le module de puissance. Ensuite, par le fil no 4, le signal est transmis à la carte d'acquisition, qui sera transmis à l'interface SimuLink.

Par le fil no 1, le signal venant de cette même interface SimuLink est envoyé à l'amplificateur, pour ensuite alimenter le servomoteur.

Le signal de contrôle et le traitement des données recueillies se font finalement dans une interface Matlab, avec l'ajout de blocs et de définitions créés par QuaRC. Cette partie du contrôle est décrite dans la section suivante.

1.3. Modules SimuLink

L'interaction entre le contrôleur développé dans l'environnement Matlab et le modèle pratique se fait à l'aide de certains blocs SimuLink programmés par Quanser. D'abord, un bloc sert à initialiser les variables internes utilisées par les fonctions de Quanser et à définir les paramètres de la carte d'acquisition utilisée. Ce bloc doit simplement être inséré dans le modèle SimuLink, sans le relier à quoi que ce soit. Il est illustré à la figure 4, en haut à gauche du modèle.

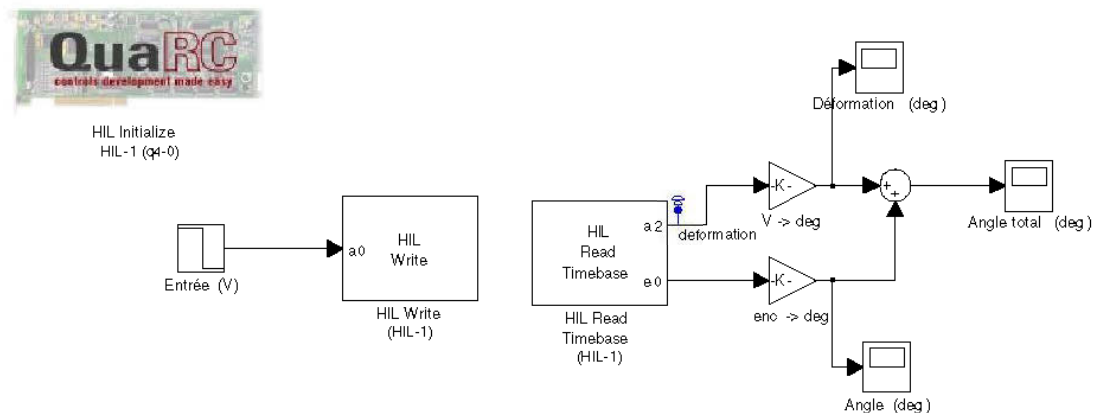


Figure 4: Blocs de QuaRC

Le second bloc utilisé est celui qui envoie le signal du correcteur au moteur, le bloc HIL Write. On doit l'associer d'abord à la carte d'acquisition branchée au modèle, dans les paramètres du bloc. Ensuite, on y applique simplement le signal à

envoyer au moteur; il est ensuite amplifié et envoyé au servomoteur. Le bloc est celui de gauche à la figure 4, relié au bloc d'entrée.

Finalement, le bloc envoyant à Matlab les données mesurées par les différents capteurs est le dernier bloc utilisé, le bloc HIL Read. Dans ses paramètres, les encodeurs et les capteurs analogiques sont activés et une sortie pour chacun d'entre eux est ajoutée au bloc. Pour l'application du module du bras flexible, les sorties e0 et a2 représentent respectivement l'encodeur du servomoteur et le signal de la jauge de déformation.

Les dimensions et autres valeurs utiles du bras flexible sont regroupées dans le tableau 1:

Tableau 1: Paramètres du bras flexible

Paramètre	Valeur	unités
Longueur (L)	41.9	cm
Masse (M)	0.065	Kg
Module de Young (E)	193	GPa
Moment d'aire (Iz)	1.67e-03	m ⁴
Aire de la section (A)	20	mm ²
Moment d'inertie (JL)	0.004	Kg.m

CHAPITRE 2

MODÈLES MATHÉMATIQUES DU SYSTÈME

Dans cette section, deux modèles linéaires du bras flexible seront développés. Pour le premier, le modèle simplifié, la flexibilité du bras est considérée comme un ressort ayant une certaine rigidité (K_{stiff}). Dans le second modèle, par modes supposés, la membrure est étudiée comme une poutre d'Euler-Bernoulli encastrée-libre.

Pour chacun des modèles, un résumé de la théorie sera présenté, les équations seront posées et développées sous forme de modèles d'état (algébriquement). Ensuite, les valeurs numériques des paramètres du système réel seront introduites pour obtenir un modèle d'état fonctionnel. À partir de ce modèle d'état, on déterminera la fonction de transfert, les zéros et les pôles de chacun des modèles, pour finalement les comparer.

2.1. Modèle simplifié

Pour obtenir un modèle linéaire, des hypothèses doivent nécessairement être effectuées pour simplifier le modèle. D'abord, l'amortissement interne du bras est considéré nul; cela annule donc une bonne partie de la non-linéarité. De plus, on considère le bras comme étant un ressort de torsion, avec une constante de ressort dépendant des paramètres physiques de la membrure. La masse du bras est considérée ponctuelle et concentrée à son extrémité. Le schéma du système simplifié est donné à la figure 5.

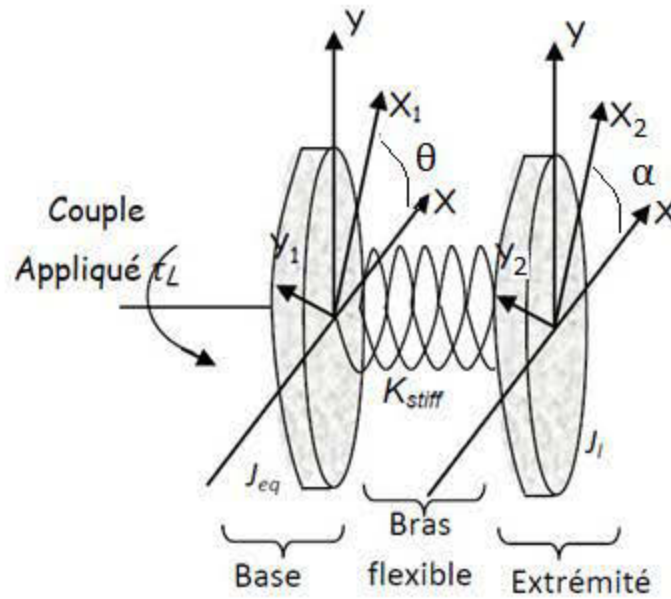


Figure 5: Modèle avec ressort

2.1.1. Partie mécanique

Dans la méthode de Lagrange, on définit l'énergie potentielle en fonction des variables d'état ainsi que l'énergie cinétique du système, afin de former le lagrangien. Définissons d'abord les variables d'état :

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

où :

θ : l'angle de rotation de la base du bras

α : la déformation angulaire de l'extrémité

Une fois ces paramètres définis, l'énergie potentielle et l'énergie cinétique sont exprimées en fonction des variables d'état. Comme le bras flexible se déplace dans un plan horizontal, son énergie potentielle sera simplement l'énergie accumulée dans le ressort de torsion (représentant la flexibilité de la membrure), soit :

$$V = \frac{1}{2} K_{stiff} \alpha^2 \quad (2.2)$$

où K_{stiff} est la rigidité équivalente du bras. L'énergie cinétique de rotation de la base ainsi que celle de l'extrémité du bras sont exprimées par:

$$T = \frac{1}{2} J_{eq} \frac{d\theta^2}{dt} + \frac{1}{2} J_l \left(\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \quad (2.3)$$

où J_{eq} et J_l sont, respectivement, l'inertie de rotation équivalente du moteur et celle du bras. Les forces généralisées, qui agissent sur le bras, sont donc fonction de l'amortissement interne de la base, B_{eq} , du couple appliqué par le moteur, τ_L , ainsi que de l'amortissement interne du bras, B_l , :

$$Q_\theta = \tau_L - B_{eq} \frac{d\theta}{dt} \quad (2.4)$$

$$Q_\alpha = B_l \frac{d\alpha}{dt} \quad (2.5)$$

Comme l'amortissement de la membrure est négligé, les équations (2.4) et (2.5) deviennent:

$$Q_\theta = \tau_L - B_{eq} \frac{d\theta}{dt} \quad (2.6)$$

$$Q_\alpha = 0 \quad (2.7)$$

On forme ainsi le lagrangien par :

$$L = T - V = -\frac{1}{2}K_{stiff}\alpha^2 + \frac{1}{2}J_{eq}\frac{d\theta^2}{dt} + \frac{1}{2}J_l\left(\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \quad (2.8)$$

et en appliquant la méthode de Lagrange, l'équation suivante est obtenue :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, 2 \quad (2.9)$$

d'où découle les équations (2.10) et (2.11):

$$(J_{eq} + J_l)\frac{d^2\theta}{dt^2} + J_l\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \tau_L - B_{eq}\frac{d\theta}{dt} \quad (2.10)$$

$$J_l\left(\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d^2\alpha}{dt^2}\right) + K_{stiff}\alpha = 0 \quad (2.11)$$

qu'on peut remanier ainsi :

$$J_{eq}\frac{d^2\theta}{dt^2} - K_{stiff}\alpha + B_{eq}\frac{d\theta}{dt} = \tau_L \quad (2.12)$$

$$J_l\frac{d^2\alpha}{dt^2} + J_l\left(\frac{K_{stiff}\alpha}{J_{eq}} - \frac{B_{eq}}{J_{eq}}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\tau_L}{J_{eq}}\right) + K_{stiff}\alpha = 0 \quad (2.13)$$

ou encore, sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_{stiff}}{J_{eq}} & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \\ 0 & -K_{stiff} \left(\frac{1}{J_{eq}} + \frac{1}{J_l} \right) & \frac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} \\ -\frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix} \tau_L \quad (2.14)$$

2.1.2. Partie électrique

Le circuit électrique du moteur qui entraîne le bras est illustré à la figure 6. La relation cherchée est donc celle reliant la tension d'alimentation du moteur et le moment de force appliqué par ce dernier sur la membrure.

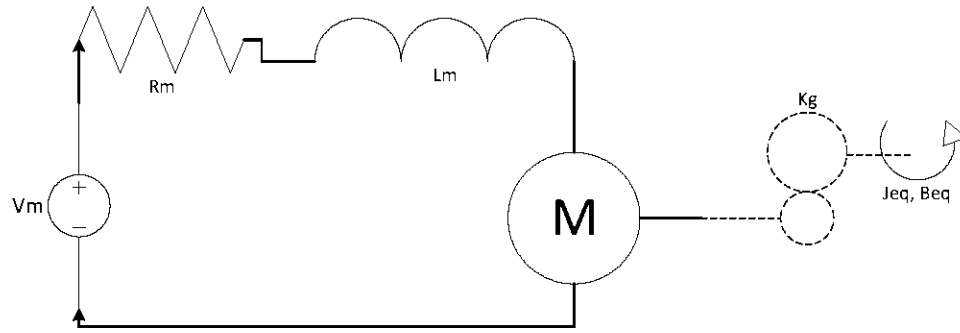


Figure 6: Modèle du servomoteur

En appliquant la loi des mailles au circuit électrique, la première équation est identifiée:

$$V_m - R_m I_m - L_m s I_m = E_m \quad (2.15)$$

où V_m est la tension d'alimentation du moteur, I_m le courant du circuit, R_m la résistance, L_m l'inductance et E_m la force contre électromotrice.

Les équations manquantes sont celles caractérisant le moteur à courant continu. Il s'agit de la force contre électromotrice:

$$E_m = k_m s \theta_m \quad (2.16)$$

où k_m est la constante du moteur et θ_m est son angle de rotation.

$$\tau_L = \eta_g k_g \tau_m \quad (2.17)$$

où η_g est l'efficacité des engrenages, k_g le rapport de réduction de ces engrenages et τ_m le moment appliqué par le moteur.

$$\tau_m = \eta_m k_T I_m \quad (2.18)$$

où η_m est l'efficacité du moteur et k_T la constante du moteur.

En négligeant l'inductance du circuit d'armature ($L_m = 0$) et en remaniant les équations (2.15) à (2.18), on obtient:

$$\tau_L = \frac{\eta_m k_T \eta_g k_g}{R_m} (V_m - k_m \dot{\theta}_m) \quad (2.19)$$

2.1.3. Modèle d'état

En insérant l'équation (2.19) dans l'équation (2.14), le modèle d'état devient:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_{stiff}}{J_{eq}} & -\frac{(B_{eq} + \eta_m k_T \eta_g k_g k_m)}{J_{eq}} & 0 \\ 0 & -K_{stiff} \left(\frac{1}{J_{eq}} + \frac{1}{J_l} \right) & \frac{B_{eq} + \eta_m k_T \eta_g k_g k_m}{J_{eq}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$+ \frac{\eta_m k_T \eta_g k_g}{R_m J_{eq}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} V_m$$

Les matrices du modèle d'état peuvent être, en considérant la sortie comme le déplacement angulaire total de l'extrémité du bras, réécrites comme suit:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & -c & 0 \\ 0 & -a-b & c & 0 \end{bmatrix} \quad B = d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$C = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \quad D = 0$$

Où a, b, c et d sont facilement identifiables à partir de l'équation (2.20).

Après avoir calculé analytiquement chacune des constantes, on obtient une bonne approximation des paramètres réels du modèle, qui seront en fait le point de départ de l'algorithme d'identification. Les valeurs des paramètres de l'équation (2.20) sont données au tableau deux.

Tableau 2: Paramètres du système

Description	Symbole	Valeur
Résistance du moteur	R_m	2.6Ω
Inductance du moteur	L_m	0.18 mH
Gain du moteur	k_m	$7.68e-03 \text{ V*s/rad}$
Facteur de réduction de vitesse	k_g	70
Rendement du moteur	η_m	0.69
Rendement du réducteur de vitesse	η_g	0.90
Moment d'inertie équivalent	J_{eq}	$2.08e-03 \text{ kg*m}^2$
Coefficient d'amortissement	B_{eq}	$4.00e-03 \text{ N*m*s/rad}$

Les valeurs des paramètres a, b, c et d se trouvent dans (2.22):

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 673.07 \\ 350.0 \\ 35.133 \\ 61.732 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Après avoir appliqué le procédé d'identification avec une entrée échelon et une sortie $y = \alpha$, en utilisant la méthode des moindres carrés, appliquée à l'aide de l'algorithme de Newton, on obtient (résultats obtenus à l'aide du logiciel SIPSD [8] :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 707.84 \\ 342.9587 \\ 34.4061 \\ 78.9122 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Voici donc sur la figure 7, à gauche, la superposition de deux sorties pour une entrée impulsion: en bleu, la réponse du système avec les paramètres identifiés à l'équation (2.23) et en rouge, la réponse réelle du module physique; à droite, les résidus sont aussi illustrés montrant la différence entre la réponse du modèle identifié et celle du système réel.

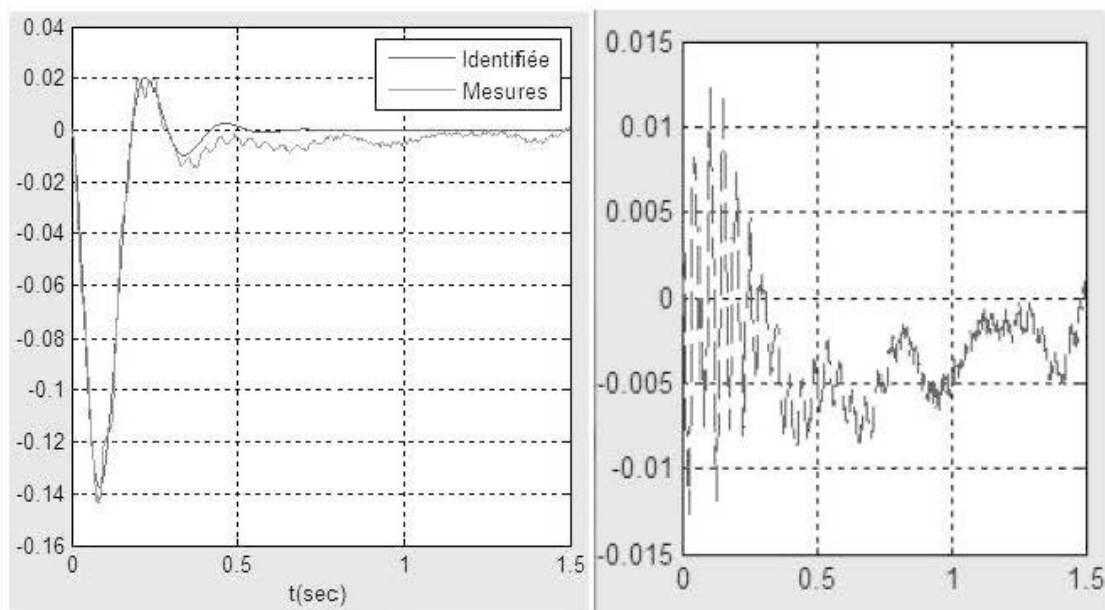


Figure 7: Résultats de l'identification

2.1.4. Fonction de transfert

La fonction de transfert du système peut être développée à partir du modèle d'état:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.24)$$

En introduisant les matrices de l'équation (2.21) dans cette expression, on développe la fonction de transfert algébrique du modèle simplifié:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bd}{s(s^3 + cs^2 + (b+a)s + bc)} \quad (2.25)$$

Une fois les valeurs identifiées à l'équation (2.23) insérées dans l'équation (2.25), la fonction de transfert devient:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{27063}{s(s^3 + 34.41s^2 + 1051s + 11801)} \quad (2.26)$$

2.1.5. Zéros et pôles

Ce modèle ne comporte pas de zéro, et ses pôles sont les suivants:

$$p_1 = 0; \quad p_{2,3} = -9.41 \pm 25.86i; \quad p_4 = -15.58 \quad (2.27)$$

La fréquence naturelle ω_n et le coefficient d'amortissement ξ correspondant aux pôles complexes conjugués sont:

$$\xi = 0.342 \quad \omega_n = 27.52 \text{ rad/s} \quad (2.28)$$

2.2. Modèle par modes supposés

Ce modèle, à la différence du précédent, considère la déformation du bras sur toute sa longueur et que son poids est distribué linéairement tout le long de la membrure. On suppose la déformation comme étant le produit d'une fonction de forme, caractérisant la géométrie du bras déformé, et d'une fonction temporelle.

Comme pour le modèle précédent, des hypothèses simplificatrices s'imposent. L'inertie de rotation et les effets de l'effort tranchant ont été négligés, ainsi que l'amortissement du bras. Finalement, la déformation et la vitesse de rotation de la membrure sont considérées faibles.

2.2.1. Équations de Lagrange

Toujours dans le but de calculer le lagrangien, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle doivent être exprimées en fonction des variables d'état. Dans ce cas-ci, la position angulaire du moteur, sa vitesse de rotation, les modes de déformation du bras ainsi que leur dérivées sont considérés. La déformation est définie par la variable v .

D'abord, l'énergie cinétique dépend de la vitesse de rotation du moteur ainsi que de la vitesse de la membrure. Elle s'exprime donc comme étant la somme de l'énergie cinétique du moteur, T_M , et de celle de chaque particule du bras, T_{dm} . En considérant la position vectorielle de l'élément dm comme étant R_{dm} , l'énergie cinétique s'exprime par:

$$T = T_M + T_{dm} = \frac{1}{2}J_{eq}\dot{\theta}^2 + \int_0^L \frac{1}{2}\rho\dot{R}_{dm}\dot{R}_{dm}dx \quad (2.29)$$

où ρ est la densité linéique du bras et R_{dm} la position de l'élément différentiel de masse du bras par rapport au centre de rotation du moteur. Pour ce qui est de l'énergie potentielle, comme le bras évolue dans le plan horizontal, la seule énergie accumulée par le système est celle de la flexion de la membrure. Elle s'exprime donc par:

$$V = \frac{1}{2}EI_z \int_0^L v''^2 dx \quad (2.30)$$

où E est le module de Young du bras, I_z est l'inertie selon l'axe Z du bras et v représente le déplacement de l'élément dm par rapport à son axe neutre. La force non

conservatrice de ce système est composée de celle due à l'amortissement interne du moteur ainsi que du moment de force appliqué, qu'on exprime ainsi:

$$Q = \frac{1}{2} B_{eq} \dot{\theta}^2 + \tau_L \quad (2.31)$$

Pour pouvoir définir un modèle d'état partiellement discret, des hypothèses sur la fonction définissant la déformation, v , doivent être faites. On l'estime donc comme étant le produit d'une fonction de forme, indépendante du temps, et d'une fonction temporelle seulement, indépendante de la position sur la membrure de l'élément dm (les variables d'état des modes flexibles du modèle). La membrure flexible, avec les variables définies dans ce chapitre, est illustrée à la figure 8.

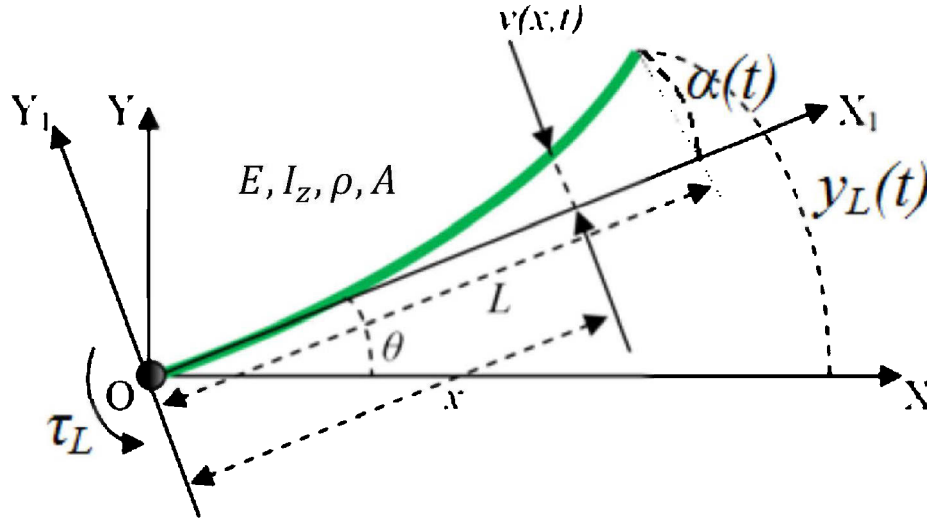


Figure 8: Paramètres de la membrure flexible

La déformation s'exprime par:

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_{fi}(t) = \phi^T(x) q_f(t) \quad (2.32)$$

où n est le nombre de modes retenu. Pour ce modèle, les fonctions de forme utilisées sont les fonctions polynomiales, soit plus précisément:

$$\phi^T(x) = \left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 \left(\frac{x}{L}\right)^3 \dots \left(\frac{x}{L}\right)^{n+1} \right] \quad (2.33)$$

Une fois la déformation remplacée dans les équations (2.29) et (2.30), les équations deviennent, sous forme matricielle:

$$T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\theta} & \dot{q}_f^T \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} I_t & M_{rf}^T \\ M_{rf} & M_{ff} \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{q}_f \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$V = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \theta & q_f^T \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff} \end{bmatrix}}_K \begin{bmatrix} \theta \\ q_f \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\theta} & \dot{q}_f^T \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} B_{eq} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_B \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{q}_f \end{bmatrix} + \tau_L \quad (2.36)$$

où les différentes expressions des variables utilisées sont définies (avec leurs dimensions) comme suit:

$$\begin{aligned} I_t &= I_m + \frac{\rho L^3}{3} \quad (1 \times 1) \\ M_{rf} &= \rho \int_0^L x \phi dx \quad (n \times 1) \\ M_{ff} &= \rho \int_0^L \phi \phi^T dx \quad (n \times n) \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$K_{ff} = EI_z \int_0^L \phi'' \phi'''^T dx \quad (n \times n)$$

$$x = [\theta \quad q_f^T \quad \dot{\theta} \quad \dot{q}_f^T]^T \quad \text{avec } q_f \quad (n \times 1)$$

En appliquant les équations de Lagrange, on obtient le modèle d'état suivant:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}B \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}U \end{bmatrix} \tau_L \quad \text{où } U = [1 \quad \bar{0}]^T \quad (2.38)$$

$\bar{0}: (1 \times n)$

Pour ce qui est de la conversion du moment de force vers la tension d'alimentation du moteur, on utilise les mêmes équations que pour le modèle simplifié: (2.15) à (2.19).

2.2.2. Modèle d'état

Le modèle d'état est donc, sous sa forme algébrique (pour 1 mode), en considérant la position de l'extrémité comme sortie ($y = \theta + \alpha = \theta + v(L, t)/L$):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{240EI_z}{L^2(\rho L^3 + 48I_m)} & -\frac{48(B_{eq} + K_g^2 K_m^2 n_g n_m / R_m)}{\rho L^3 + 48I_m} & 0 \\ 0 & -\frac{320EI_z(\rho L^3 + 3I_m)}{\rho L^4(\rho L^3 + 48I_m)} & \frac{60L(B_{eq} + K_g^2 K_m^2 n_g n_m / R_m)}{\rho L^3 + 48I_m} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$B = \frac{K_g K_m n_g n_m}{R_m(\rho L^3 + 48I_m)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 48 \\ -60L \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 1/L \quad 0 \quad 0] \quad D = 0$$

Finalement, en appliquant les valeurs nominales du tableau 2:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1876 & -31.5 & 0 \\ 0 & -1621 & 16.5 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 55.4 \\ -29 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.39 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad D = 0 \quad (2.40)$$

2.2.3. Fonction de transfert

De la même façon que pour le modèle simplifié, on obtient la fonction de transfert ainsi:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.41)$$

Soit, de façon numérique:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-13.82s^2 + 1.432s + 3540}{s(s^3 + 31.5s^2 + 1621s + 2011)} \quad (2.42)$$

2.2.4. Zéros et pôles

Les zéros de ce système sont:

$$z_1 = 16.056, \quad z_2 = -15.953, \quad (2.43)$$

Les pôles du modèle, eux, sont:

$$p_1 = 0, \quad p_{2,3} = -8.43 \pm 36.10i, \quad p_4 = -14.63 \quad (2.44)$$

L'amortissement et la fréquence naturelle des pôles complexes conjugués sont:

$$\xi = 0.227 \quad \omega_n = 37.07 \quad (2.45)$$

Dans le modèle des modes supposés, la fonction de transfert contient un zéro positif; cela implique que le système est un non minimum de phase. Les pôles des deux modèles développés précédemment sont comparables; ils présentent chacun un pôle à l'origine, deux pôles complexes conjugués à partie réelle négative et un pôle

réel négatif; les valeurs sont comparables. Les réponses à l'impulsion sont par contre un peu différentes; la figure 9 les illustre:

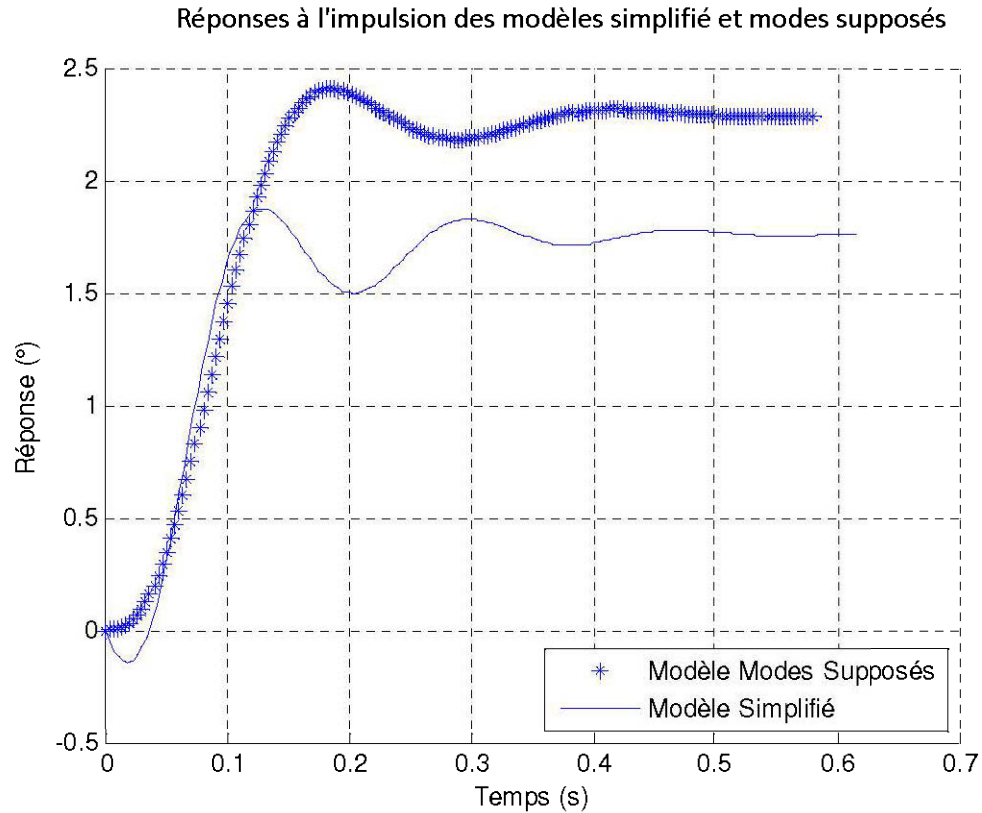


Figure 9: Modèles simulés

2.3. *Modèle non-linéaire*

Certains termes d'ordre 2 ont été négligés dans le développement du modèle par modes supposés. Dans le but d'obtenir le modèle non-linéaire, le terme d'ordre 2 (cinématique non linéaire) sera rajouté au modèle par modes supposés [23]:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}[C(q, \dot{q})\dot{q}] \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} 2\dot{q}_r q_f^T C_{rr} \dot{q}_f \\ -\dot{q}_r^2 C_{rr} q_f \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

où le terme C_{rr} s'exprime ainsi:

$$C_{rr} = \rho \int_0^L \phi \phi^T dx - \rho \int_0^L x \int_0^x \phi' \phi'^T ds \quad (2.47)$$

Une fois les fonctions de formes remplacées et les intégrales évaluées, le terme d'ordre 2 devient:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.98x_2x_3^2 + 3.74x_2x_3x_4 \\ -0.85x_2x_3^2 - 1.96x_2x_3x_4 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Le modèle complet devient ainsi:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1875.7 & -31.5 & 0 \\ 0 & -1621 & 16.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 55.4 \\ -29 \end{bmatrix} V_m \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.98x_3 + 3.74x_4 \\ -0.85x_3 - 1.96x_4 \end{bmatrix} x_2 x_3 \end{aligned} \quad (2.49)$$

On peut finalement exprimer le modèle sous cette forme pour faciliter l'analyse non-linéaire:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= 1875.7x_2 - 31.5x_3 + x_2x_3(0.98x_3 + 3.74x_4) + 55.4 * u \\ \dot{x}_4 &= -1621x_2 + 16.5x_3 + x_2x_3(-0.85x_3 - 1.96x_4) - 29 * u \end{aligned} \quad (2.50)$$

Le modèle simplifié (2.21), avec les valeurs identifiées à l'équation (2.23), sera le modèle linéaire utilisé pour concevoir les correcteurs. Le modèle non-linéaire (2.49) sera, pour sa part, utilisé pour le contrôle non linéaire.

CHAPITRE 3

MÉTHODE LQG/LTR

Dans le cadre de ce travail, la méthode de contrôle LQG/LTR, développée dans [9], sera appliquée. Elle consiste d'abord à déterminer le gain pour un retour d'état à l'aide de la méthode LQR. Ensuite, il suffit de déterminer les gains du filtre de Kalman en régime permanent pour minimiser l'impact des bruits et des hautes fréquences. Finalement, il ne reste plus qu'à construire la fonction de transfert du contrôleur qui sera appliqué au système.

3.1. Design du contrôleur

Le modèle utilisé pour calculer le correcteur est, comme précisé précédemment, le modèle tiré des équations (2.21 et 2.23):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & -c & 0 \\ 0 & -a-b & c & 0 \end{bmatrix} \quad B = d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$
$$C = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \quad D = 0$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 707.84 \\ 342.9587 \\ 34.4061 \\ 78.9122 \end{bmatrix}$$

Pour obtenir la première partie du gain recherché, il est nécessaire d'appliquer une commande optimale basée sur le principe LQR, soit une régulation linéaire quadratique. Pour ce faire, on doit d'abord déterminer des matrices de pondération pour décider de l'importance de la rapidité de la convergence de chacune des variables; on détermine donc les matrices R et Q comme suit :

$$R = 1; \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

De cette façon, l'erreur ainsi que l'énergie consommée sont considérées. La matrice Q représente la pondération des variables d'état, alors que R quantifie l'importance de l'énergie consommée. À l'aide de Matlab, l'équation de Riccati est alors solutionnée :

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0 \quad (3.3)$$

La matrice P satisfaisant cette équation est donc:

$$P = \begin{bmatrix} 0.5175 & 0.0533 & 0.0388 & 0.0262 \\ 0.0533 & 0.0754 & 0.0014 & 0.0014 \\ 0.0388 & 0.0014 & 0.0033 & 0.0023 \\ 0.0262 & 0.0014 & 0.0023 & 0.0016 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Ce qui nous donne un gain de retour d'état de :

$$K = R^{-1}B'TP = [1.0000 \quad -0.0015 \quad 0.0814 \quad 0.0533] \quad (3.5)$$

Pour ce qui est du filtre de Kalman [10], l'espérance des bruits de mesure et de la sortie doivent d'abord être estimées. Les matrices choisies pour exprimer la variance des bruits sont les suivantes:

$$W = E(nn') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix} \quad V = E(mm') = 0.01 \quad (3.6)$$

où n est le bruit sur les variables d'état et m le bruit sur la sortie.

Finalement, en considérant que ces bruits sont complètement indépendants, il est alors possible de résoudre l'équation de Ricatti pour le filtre de Kalman¹ en utilisant :

$$SA' + AS - SC'V^{-1}CS + GWG = 0 \quad (3.7)$$

La solution donnant S est ainsi obtenue à l'aide de Matlab :

$$S = \begin{bmatrix} 0.2644 & -0.1644 & -0.0260 & -0.0249 \\ -0.1644 & 0.9474 & 0.0559 & 0.0085 \\ -0.0260 & 0.0559 & 0.0261 & 0.0137 \\ -0.0249 & 0.0085 & 0.0137 & 0.0113 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Finalement le gain de Kalman K_{FK} est déterminé comme le gain précédent:

$$K_{FK} = SC'V^{-1} = [10.0000 \quad 78.3035 \quad 2.9964 \quad -1.6438]^T \quad (3.9)$$

Une fois les deux gains déterminés, on peut maintenant bâtir la fonction de transfert du contrôleur LQG en appliquant l'équation suivante [11]:

$$K_{LQG} = -K(sI - A + BK + K_{FK}C)^{-1}K_{FK} \quad (3.10)$$

On obtient donc la fonction de transfert suivante :

$$\frac{-57.3 s^3 - 2.72e03 s^2 - 9.641e04 s - 6.851e05}{5.71 s^4 + 713 s^3 + 2.49e04 s^2 + 4.96e05 s + 1.61e06} \quad (3.11)$$

¹La matrice G a été considérée comme une matrice identité pour le calcul du gain de Kalman.

Cette fonction de transfert doit être appliquée en rétroaction avec le système. Pour pouvoir tester ce correcteur sur le bras flexible, la fonction de transfert a été discrétisée en utilisant une période d'échantillonnage de 0.001 seconde.

3.2. Simulations et expérimentation

Pour simuler ce correcteur, le modèle simplifié est utilisé, soit les équations (2.21) et (2.23). Il a été d'abord implémenté dans SimuLink avant d'y ajouter la boucle de rétroaction et le contrôleur comme défini par sa fonction de transfert à l'équation (3.11). Le modèle considéré pour la simulation est illustré à la figure 10 alors que le modèle SimuLink pour les essais pratiques est illustré à la figure 11.

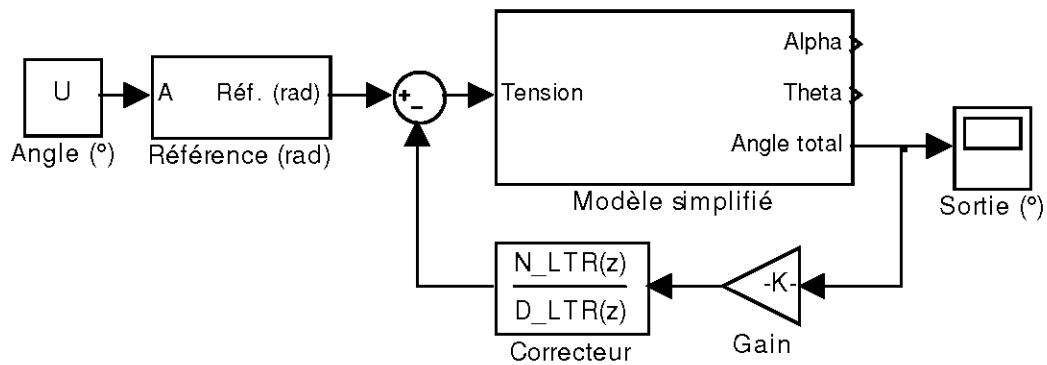


Figure 10: Montage simulation - LQG/LTR

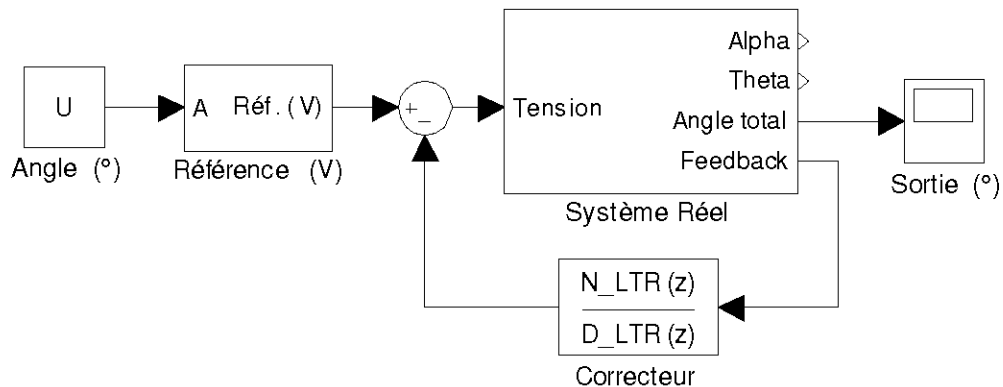


Figure 11: Montage pratique - LQG/LTR

Après avoir lancé la simulation ainsi que l'expérimentation, avec un échelon de 45° , les résultats ont été recueillis et regroupés sur deux graphiques différents; les résultats de simulation sont illustrés à la figure 12 et ceux mesurés sur le montage physique, à la figure 13.

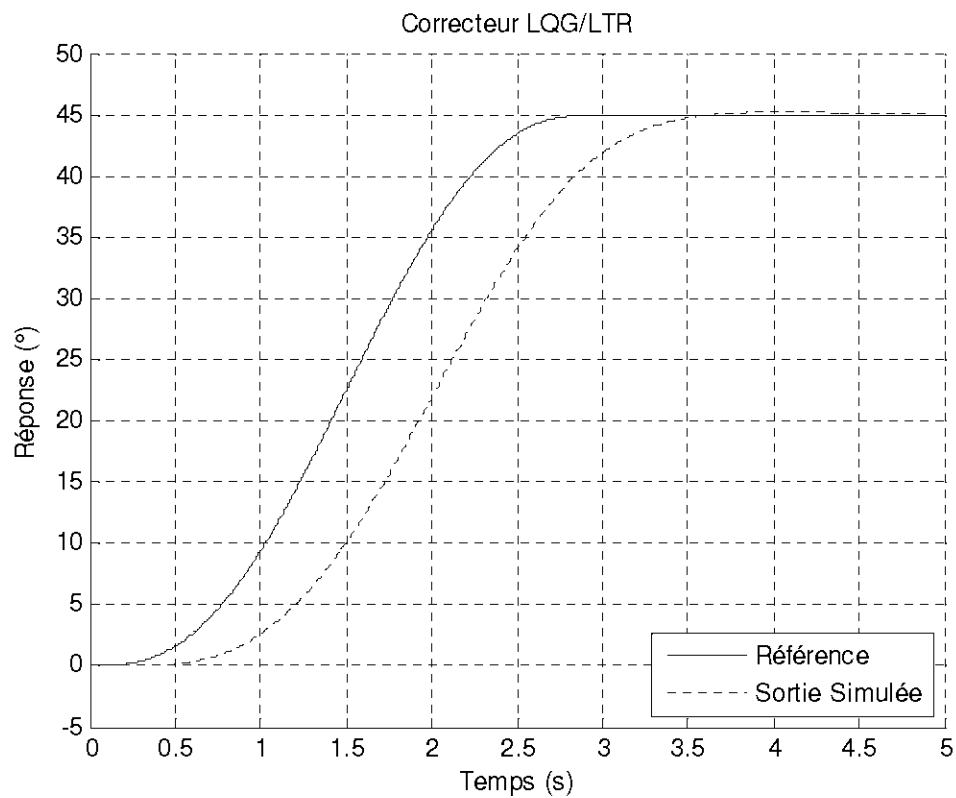


Figure 12: Résultats simulation - LQG/LTR

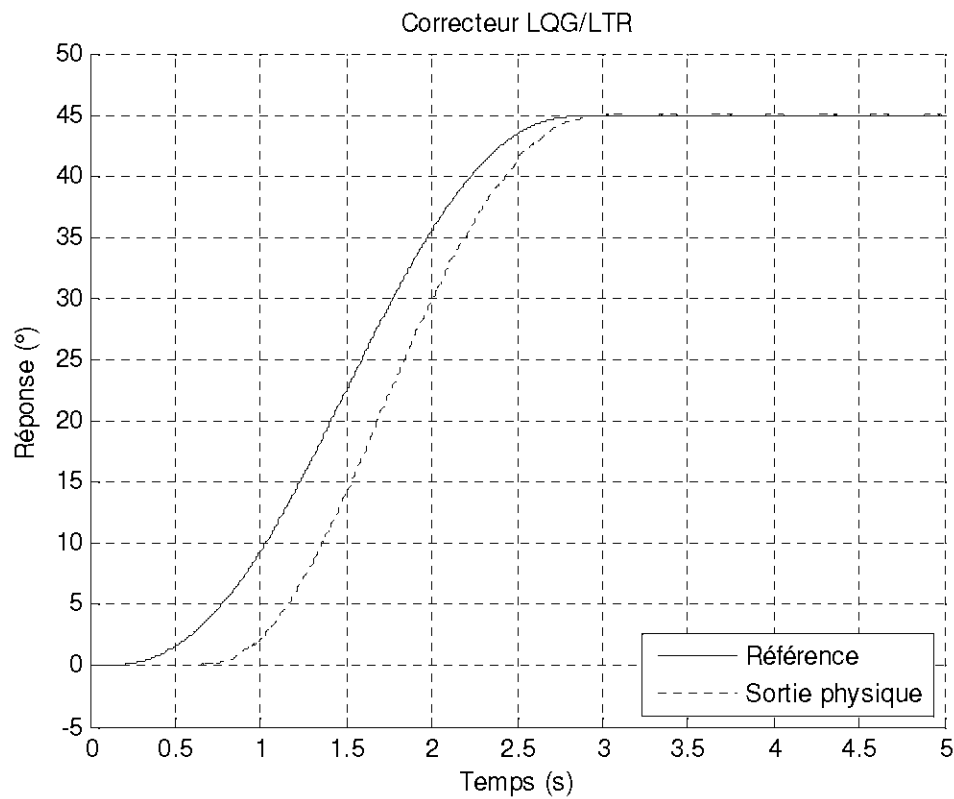


Figure 13: Résultats pratique - LQG/LTR

De plus, plusieurs matrices Q sont alors utilisées (soit $\rho \cdot I$ avec différentes valeurs de ρ) pour vérifier la robustesse de la méthode; le diagramme de Bode pour chacun des systèmes corrigés, avec les correcteurs correspondants aux matrices Q , a été tracé. Pour faciliter l'analyse, toutes ces courbes ont été tracées sur le même graphique. à la figure 14.

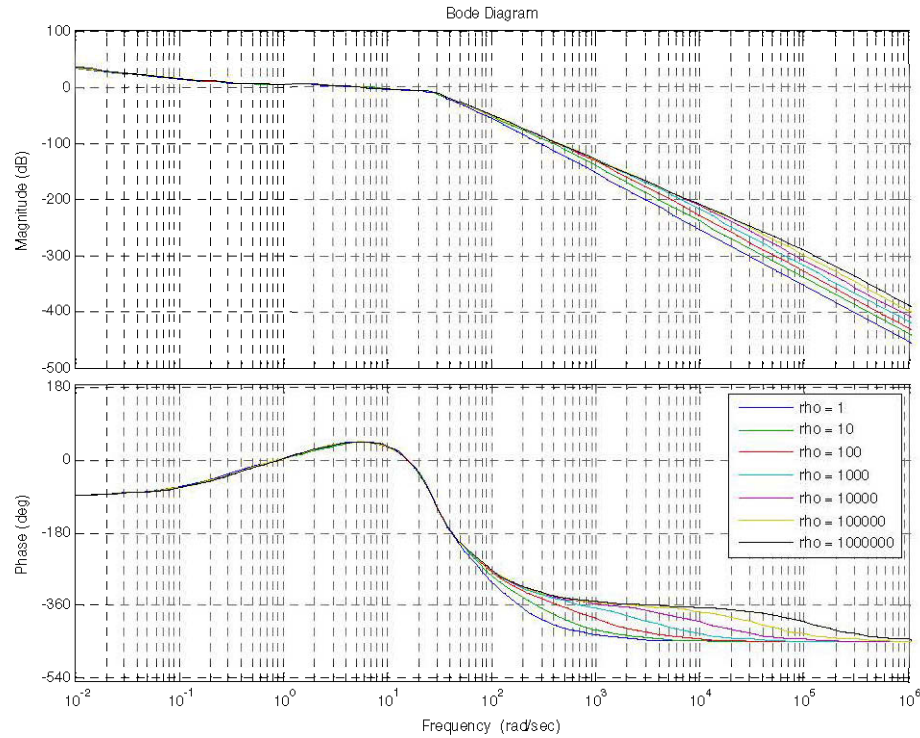


Figure 14: Robustesse simulation LQG/LTR

3.3. Analyse des résultats

D'abord, remarquons que la différence entre les résultats expérimentaux et ceux obtenus en simulation n'est pas énorme; le temps de réponse en pratique est 0,5 sec plus court, mais une petite oscillation résiduelle est constatée. Cependant, il est important de spécifier que le montage physique, incluant un réducteur de vitesse, comporte un jeu entre les dents qui ajoute un petit délai entre le moment où le moteur se met à tourner et le moment où le bras tourne. Les vibrations de la table (sur lequel est aussi posé l'amplificateur du système) est aussi en cause pour cette oscillation. Pour ce qui est de l'erreur en régime permanent, elle est nulle dans les deux cas.

Une remarque intéressante concernant le diagramme de Bode du système corrigé est le contrôle du système vis-à-vis des hautes fréquences. En effet, en choisissant judicieusement la matrice de pondération Q , on peut jouer sur le déphasage ainsi que le gain des hautes fréquences sans toutefois en atténuer les basses fréquences.

De plus, plus on diminue la valeur de ρ , plus on tend vers la courbe donnée par le correcteur avec un filtre de Kalman (la courbe supérieure). D'ailleurs, plus la valeur de ρ est faible, plus le gain du système en hautes fréquences est réduit. Le filtre de Kalman vient donc ajouter une certaine robustesse envers les perturbations et les hautes fréquences indésirables.

CHAPITRE 4

COMMANDE PAR PLACEMENT DE PÔLES

Une autre méthode de contrôle classique destinée aux systèmes linéaires est considérée. Il s'agit du contrôle par placement de pôles; à l'aide d'un retour d'état, on place chacun des pôles du système afin de s'assurer d'excellentes performances.

Cependant, pour réaliser ce genre de contrôle, les valeurs de chacune des variables d'état sont nécessaires. Comme il est présentement impossible, avec les capteurs installés sur le module, de mesurer la vitesse angulaire et la dérivée de la déformation de façon précise. Un observateur d'état sera nécessaire pour l'implantation du correcteur en pratique. Sa conception sera détaillée, avant celle du correcteur, dans la suite du chapitre.

4.1. Design de l'observateur d'état

Le design de l'estimateur d'état est semblable à un système standard où il faut contrôler, effectivement, l'erreur entre l'observation des variables et leur valeur réelle de la même façon que la sortie du système. La méthode utilisée sera donc le placement de pôles par retour d'état.

Les pôles de l'observateur d'état doivent assurer un bon temps de réponse et une erreur nulle; comme le système est d'ordre 4, le même nombre de pôles doit être sélectionné pour effectuer le placement. Les pôles sélectionnés sont deux paires de pôles complexes conjugués ayant une valeur réelle suffisamment grande pour assurer de tels résultats:

$$p_{1,2} = -15 \pm 7i \quad \text{et} \quad p_{3,4} = -30 \pm 3i \quad (4.1)$$

Comme on conçoit l'observateur, on doit déterminer les paramètres du gain de l'observateur, L , pour que la dynamique de l'erreur entre l'état actuel et celui estimé, une fois corrigée, ait les pôles désirés. La dynamique de l'erreur sur les variables d'état s'exprime donc ainsi [12]:

$$\begin{aligned} e &= x - \hat{x} \\ \dot{e} &= A_o e \end{aligned} \quad (4.2)$$

La matrice A_o s'exprime donc en fonction des paramètres du modèle et du gain de l'observateur:

$$A_o = A' - C'L \quad (4.3)$$

Ce système d'équations donne donc quatre équations et quatre inconnus; une fois résolu à l'aide de Matlab, les gains pour le retour d'état de l'observateur sont:

$$L = [-23.6 \quad 79.2 \quad 1500 \quad -1480]^T \quad (4.4)$$

4.2. Design du correcteur par retour d'état

De la même façon, le contrôleur K est choisi pour placer les pôles du système réel. Le choix de ces pôles est lui aussi primordial. En effet, un placement de pôles trop agressif (temps de réponse trop rapide) risque de déstabiliser le système, même si le résultat en simulation est bon. En effet, les fonctions non-linéaires approximées et les paramètres négligés peuvent engendrer une excitation du système non prévue.

À titre de référence, les pôles du modèle simplifié défini aux équations (2.21) et (2.23) sont rappelés et ayant pour valeurs:

$$pôles = [0 \quad -9.4146 \pm 25.8610i \quad -15.5807] \quad (4.5)$$

Il est important de noter que les matrices d'observabilité et de contrôlabilité sont de rang 4; il est donc possible de contrôler le système avec un observateur d'état.

On remarque que ce qui doit être corrigé à tout prix, c'est évidemment le pôle nul. On veut le reculer suffisamment pour s'assurer d'un bon temps de réponse, étant donné que la partie réelle des autres pôles est suffisamment faible. Les autres pôles ne seront pas déplacés de façon majeure. Les pôles choisis sont donc:

$$pôles\ désirés = [-5 \quad -9 - 5i \quad -9 + 5i \quad -16] \quad (4.6)$$

On détermine donc les pôles du système corrigé algébriquement, soit les racines de la matrice $A-BK$, pour ensuite déterminer les gains k_1 à k_4 nécessaires pour amener ces pôles aux valeurs désirées posés à l'équation (4.6). À l'aide de Matlab, on obtient donc les gains suivants, formant la matrice K :

$$K = [0.3133 \quad 6.4824 \quad -0.3006 \quad -0.3588] \quad (4.7)$$

À l'aide de ce correcteur et de l'observateur d'état, on pourra donc corriger le système à l'aide de la méthode de placement de pôles par retour d'état. Il est cependant primordial avant de s'attarder aux performances du système corrigé d'analyser l'observateur d'état, car s'il renvoie des valeurs erronées des variables d'état, le correcteur par retour d'état n'arrivera pas à stabiliser correctement le système réel.

4.3. Simulations

Le modèle simulé de l'observateur d'état et du correcteur par retour d'état est illustré à la figure 15. Il est important de rappeler que les deux systèmes sont imbriqués. En effet, l'observateur compare la sortie réelle du système et la sortie de l'observateur pour l'analyser en fonction du modèle mathématique choisi (le modèle simplifié). La partie de l'observateur dépend donc beaucoup du modèle; dans le montage, l'observateur et le modèle sont regroupés dans le bloc "Modèle simplifié".

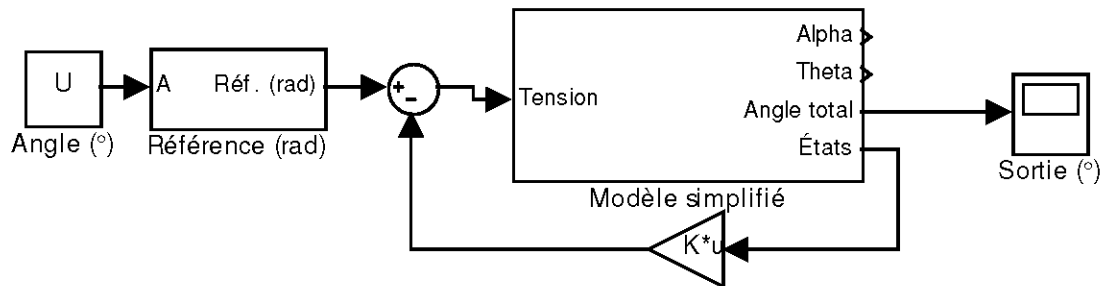


Figure 15: Montage simulation - retour d'état

D'abord, on observe les variables d'état et la sortie de l'observateur, pour vérifier que ce dernier donne bien des valeurs suffisamment près de la réalité. Les résultats des variables d'état données par le modèle mathématique et par l'observateur se superposent dans chacun des quatre graphiques de la figure 16.

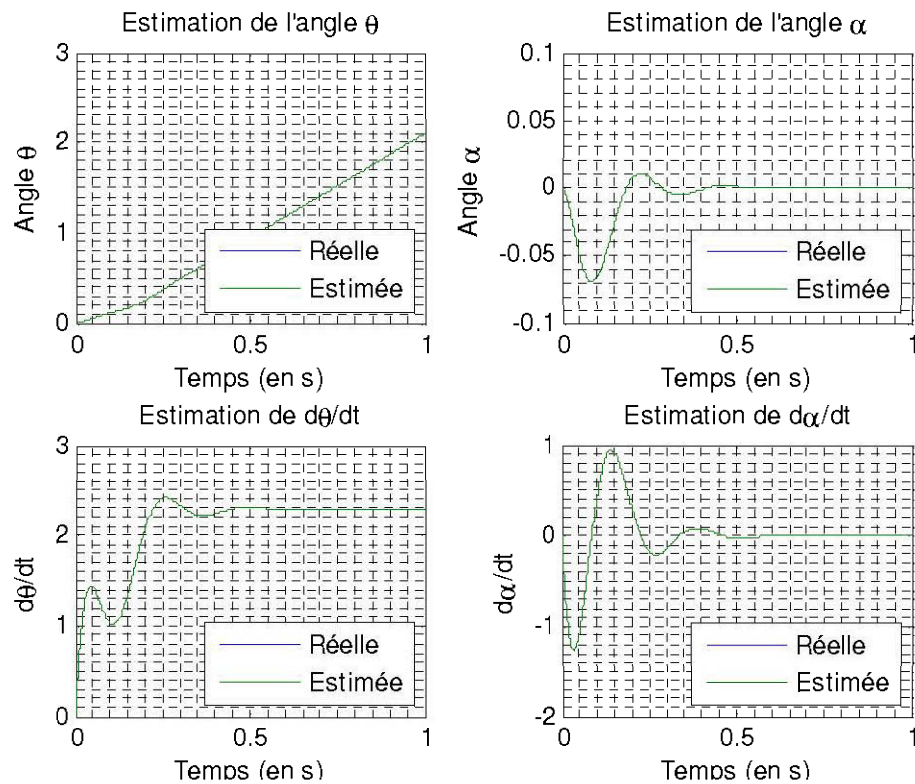


Figure 16: Simulation de l'observateur d'état

Les résultats du correcteur (soit la sortie du système corrigé), après simulation à l'aide du modèle simplifié, sont illustrés à la figure 17.

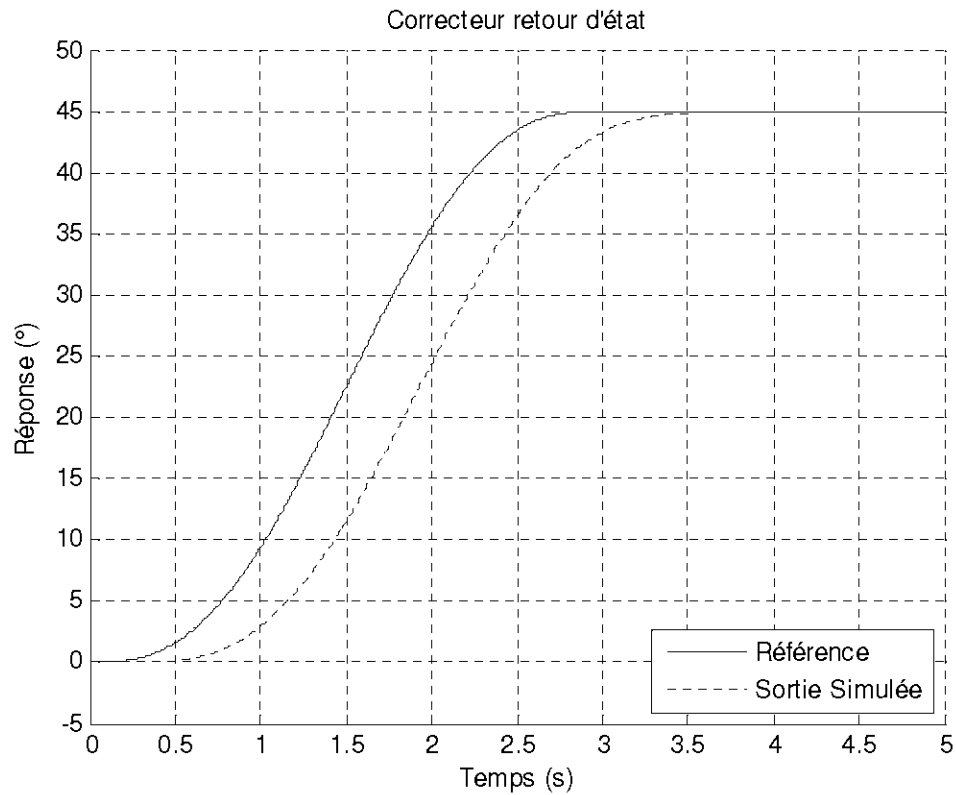


Figure 17: Résultats simulation - correcteur par retour d'état

4.4. Expérimentation

Pour l'expérimentation, le modèle à la figure 18 a été réalisé; l'entrée utilisée est une courbe polynomiale de degré 3 avec un temps de montée de trois secondes et une valeur finale de 45 secondes:

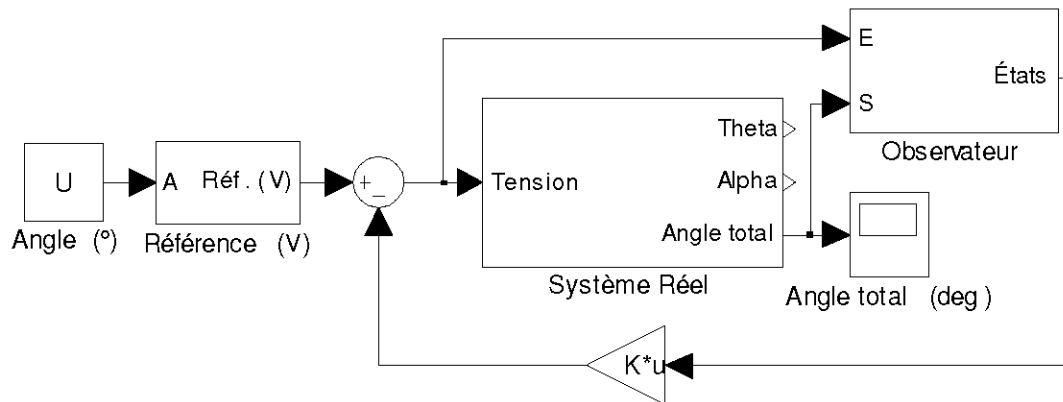


Figure 18: Montage pratique - correcteur par retour d'état

La sortie réelle est illustrée, tant qu'à elle, avec l'entrée à la figure 19:

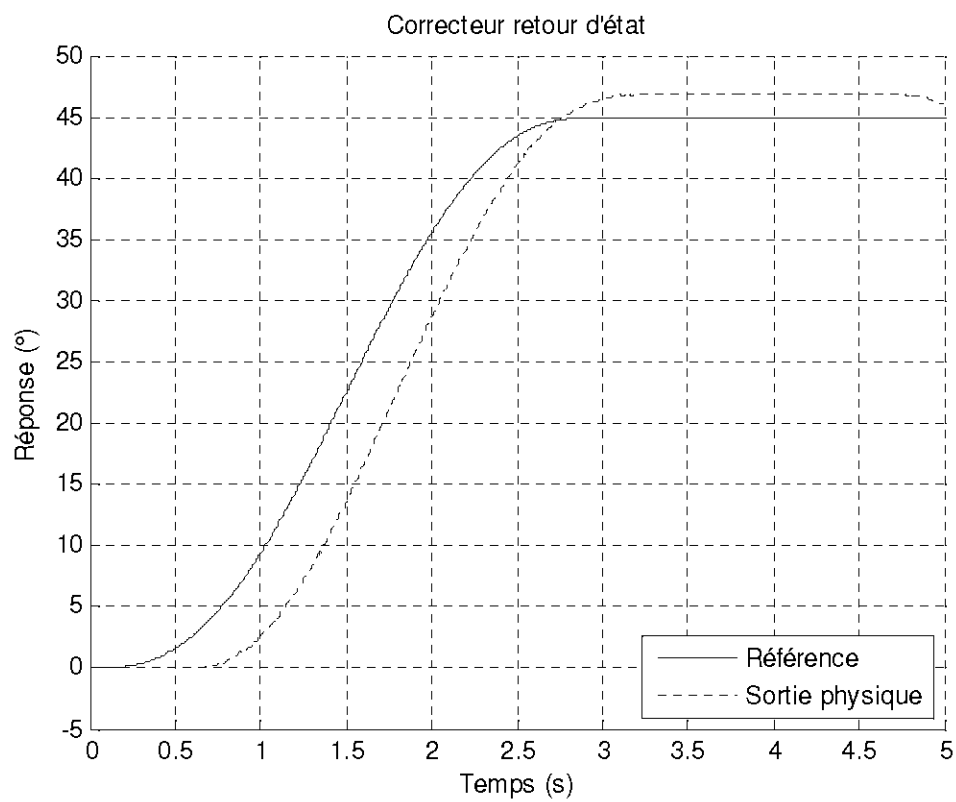


Figure 19: Résultats pratique - correcteur par retour d'état

4.5. Analyse

D'abord, l'observateur remplit de façon satisfaisante son rôle. En effet, l'erreur est nulle en régime permanent pour chacune des variables d'états et le temps de réponse est très rapide. Cet observateur d'état pourra d'ailleurs être utilisé plus tard pour d'autres méthodes nécessitant un signal dépendant de ces variables difficiles à mesurer.

Pour ce qui est du correcteur par placement de pôles, les résultats en simulations sont très bien eux aussi, assurant un temps de réponse de 0,75 sec et une erreur statique nulle. Pour ce qui est de l'expérimentation, les résultats sont tous aussi satisfaisants qu'en simulation; le temps de réponse est un peu plus court, mais une petite erreur en régime permanent est présente (ce qui n'est pas le cas en simulation).

La réponse du système physique ne comporte presque pas d'oscillation en régime permanent. Rappelons que les petites oscillations peuvent être expliquées par les facteurs énumérés dans l'analyse du chapitre précédent.

Cette méthode est un bon point de comparaison pour bien analyser les autres méthodes faisant l'objet de ce projet. Les résultats obtenus ici seront donc utilisés en tant que référence pour les autres méthodes.

CHAPITRE 5

PARAMÉTRISATION DE YOUNG

Cette méthode est plus récente que les méthodes appliquées précédemment. Le but est de déterminer l'ensemble des correcteurs apportant la stabilité au système, pour ensuite choisir les paramètres d'une fonction stable qui fait partie du contrôleur. Ainsi, par le choix de cette fonction stable, on influence les performances du système, tout en étant assuré de sa stabilité [13].

Pour y arriver, on utilisera des systèmes corrigés développés précédemment dans la zone des placements de pôles. Il va donc sans dire que le choix des pôles désirés dans la précédente section aura un impact sur le correcteur développé ici.

Une fois que l'un contrôleur stabilisant le système est connu, cette méthode permet de généraliser le contrôleur à l'ensemble des contrôleurs stabilisant le système [14].

5.1. Design du correcteur

En considérant la fonction de transfert du modèle simplifié (équations (2.21) et (2.23)), dénommé $P(s)$ dans cette section, on l'exprime ainsi:

$$P(s) = \frac{N(s)}{M(s)} = \frac{27063}{s(s^3 + 34.41s^2 + 1051s + 11801)} \quad (5.1)$$

La première étape est de décomposer le modèle corrigé en un quotient de deux fonctions de transfert qui seront utilisées pour le design du contrôleur. On peut décomposer le système à l'aide de l'égalité suivante:

$$P(s) = \frac{N(s)}{M(s)} = \frac{ss2tf(A - BK, B, C, D)}{1 - ss2tf(A - BK, B, K, D)} \quad (5.2)$$

où la fonction `ss2tf` représente la fonction de transfert obtenue avec le modèle d'état composé des matrices entre parenthèses. La forme " $a/(1-b)$ " est très pratique pour résoudre une équation de la forme de l'identité de Bézout; c'est pourquoi on la choisit. On doit ensuite déterminer la solution à l'identité de Bézout dont ces solutions doivent être stables. L'équation de Bézout considérée est la suivante:

$$N(s)X(s) + M(s)Y(s) = 1 \quad (5.3)$$

Pour s'assurer de la stabilité des fonctions $X(s)$ et $Y(s)$, il est préférable d'utiliser des systèmes corrigés utilisés précédemment (chapitre 4), ces fonctions devant être toutes stables.

Pour la première solution, $X(s)$, on prend une fonction de transfert stable, soit le système de l'observateur d'état d'un système observateur d'état / correcteur. En effet, les matrices du modèle d'état deviennent ceux énoncées à l'équation (5.4), si on considère la sortie comme étant le retour d'état du système global ($K \cdot x$):

$$ss2tf(A - LC, L', K, D) \quad (5.4)$$

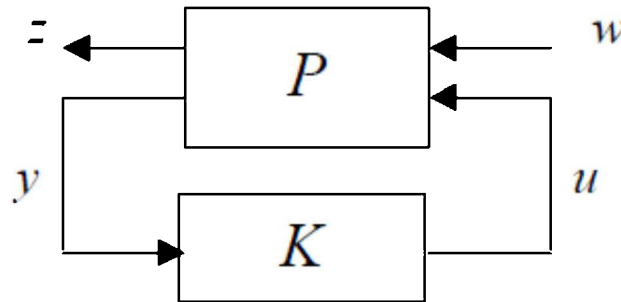


Figure 20: Schéma paramétrisation de Youla

Pour la deuxième fonction, $Y(s)$, on doit prendre l'expression suivante pour s'assurer du respect de l'équation de Bézout:

$$1 + ss2tf(A - LC, B, K, D) \quad (5.5)$$

Les pôles désirés pour définir les matrices A_{obs} , L et K , ont été choisis de façon à converger rapidement. Les pôles désirés sont (contrôleur en premier, observateur en second):

$$\begin{aligned} p_1 &= -15, & p_{2,3} &= -20 \pm 10i, & p_4 &= -30 \\ p_1 &= -30, & p_2 &= -35, & p_3 &= -40, & p_4 &= -50 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Maintenant que ces deux solutions sont connues, le correcteur $X(s)/Y(s)$ est équivalent au correcteur défini dans la section 6. Il est donc possible, à partir de ce correcteur, d'obtenir l'ensemble des correcteurs stabilisant le système à l'aide de l'équation suivante:

$$C = \frac{X(s) + M(s)Q(s)}{Y(s) - N(s)Q(s)} \quad (5.7)$$

Ceci est vrai tant que la fonction $Q(s)$ est stable.

Le choix de cette fonction $Q(s)$ définit ainsi les performances du système corrigé. Toute fonction stable peut alors être choisie.

Pour les besoins de cette expérimentation, le choix de cette fonction doit être simple; une fonction d'ordre 1, ayant un pôle et un zéro, est ainsi choisie (son pôle ayant une valeur réelle négative pour assurer la stabilité du système):

$$Q(s) = \frac{s-1}{s+1} \quad (5.8)$$

Le correcteur ainsi calculé, sous forme d'une fonction de transfert, est plutôt compliqué; les zéros et les pôles de correcteur sont énumérés ci-dessous:

<i>Zéros</i>	<i>Pôles</i>	<i>Gain</i>
9.5357e+002	-6.5840e+001	20
2.3434e+001	-4.4210e+001 +3.1734e+001i	
-5.1109e+001	-4.4210e+001 -3.1734e+001i	
-5.0000e+001	-5.1159e+001	
-4.0000e+001	-5.0000e+001	
-3.5000e+001	-4.0000e+001	
-3.0018e+001 +3.1387e-002i	-3.5000e+001	
-3.0018e+001 -3.1387e-002i	-3.0036e+001 +6.3724e-002i	
-2.9964e+001	-3.0036e+001 -6.3724e-002i	
-2.0660e+001 +9.9654e+000i	-2.9928e+001	
-2.0660e+001 -9.9654e+000i	-2.0660e+001 +9.9649e+000i	
-2.0000e+001 +1.0000e+001i	-2.0660e+001 -9.9649e+000i	
-2.0000e+001 -1.0000e+001i	-2.0000e+001 +1.0000e+001i	
-1.5579e+001	-2.0000e+001 -1.0000e+001i	
-1.5000e+001	-1.5000e+001	
-1.3805e+001	-1.3790e+001	
-1.0132e+000	-1.0605e+000	
-1.0000e+000	-1.0000e+000	

On remarque que plusieurs pôles et zéros s'annulent ou sont très proches de s'annuler. En simplifiant ces zéros et ces pôles et en négligeant ceux ayant peu d'influence, on obtient un contrôleur beaucoup moins compliqué:

<i>Zéros</i>	<i>Pôles</i>	<i>Gain</i>
9.5360e+002	-6.5840e+001	20
-1.5580e+001	-4.4210e+001 -3.1740e+001i	
2.3430e+001	-4.4210e+001 +3.1740e+001i	

5.2. Simulation

Le système est simulé avec le modèle simplifié et le contrôleur de Youla simplifié développé à la fin de la section précédente. Le schéma utilisé est illustré à la figure 21 et les résultats de simulation sont donnés à la figure 22.

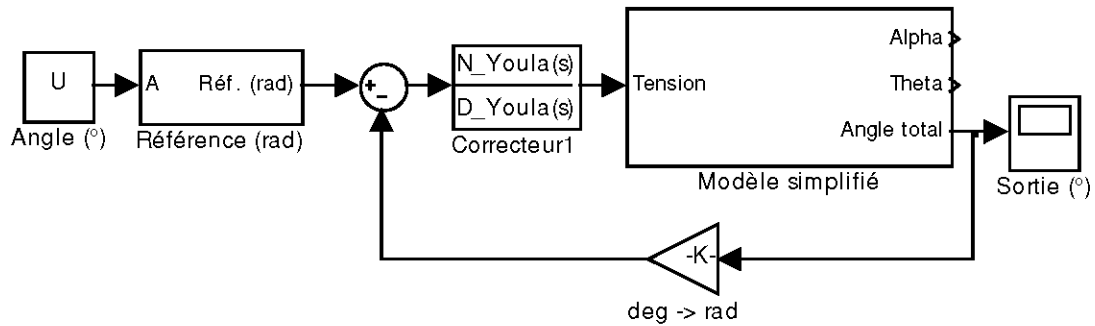


Figure 21: Montage simulation - Youla

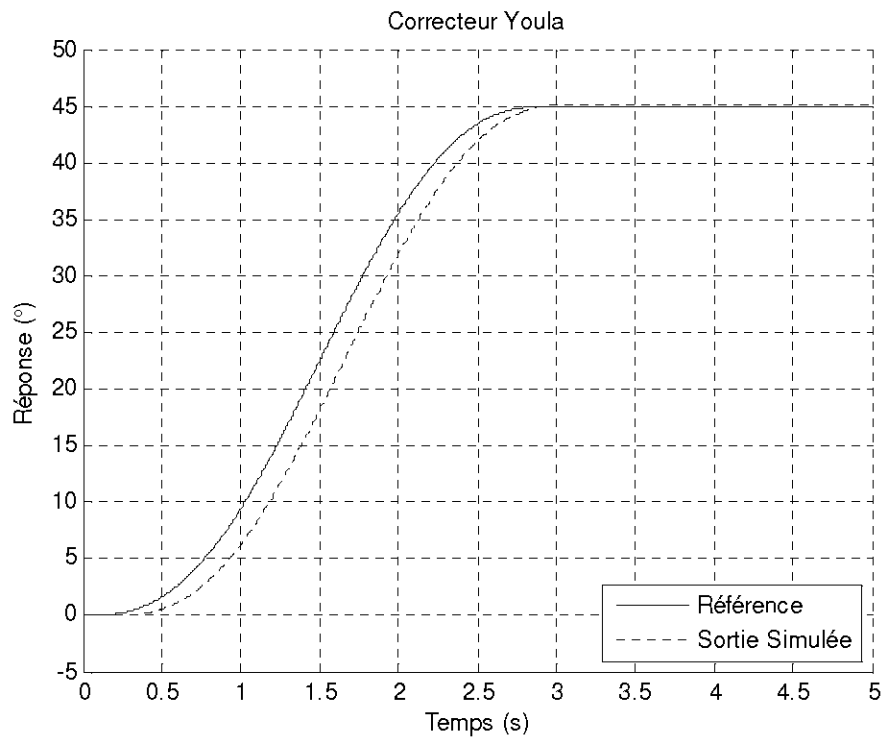


Figure 22: Résultats simulation - Youla

5.3. Expérimentation

Le modèle utilisé pour faire les expérimentations sur le montage physique est illustré à la figure 23.

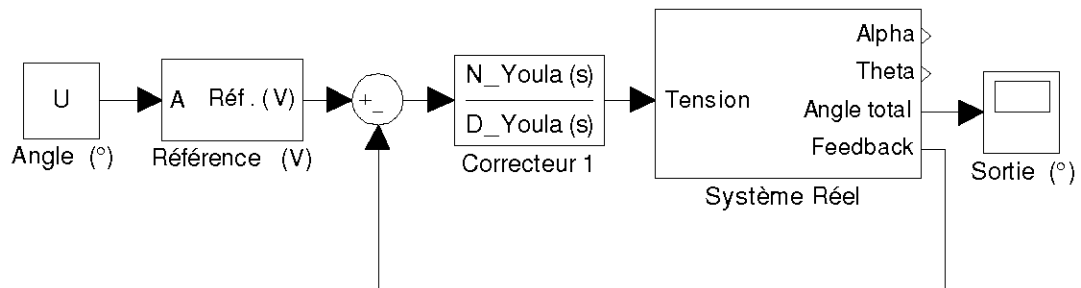


Figure 23: Montage pratique - Youla

Les résultats expérimentaux sont présentés, à la figure 24:

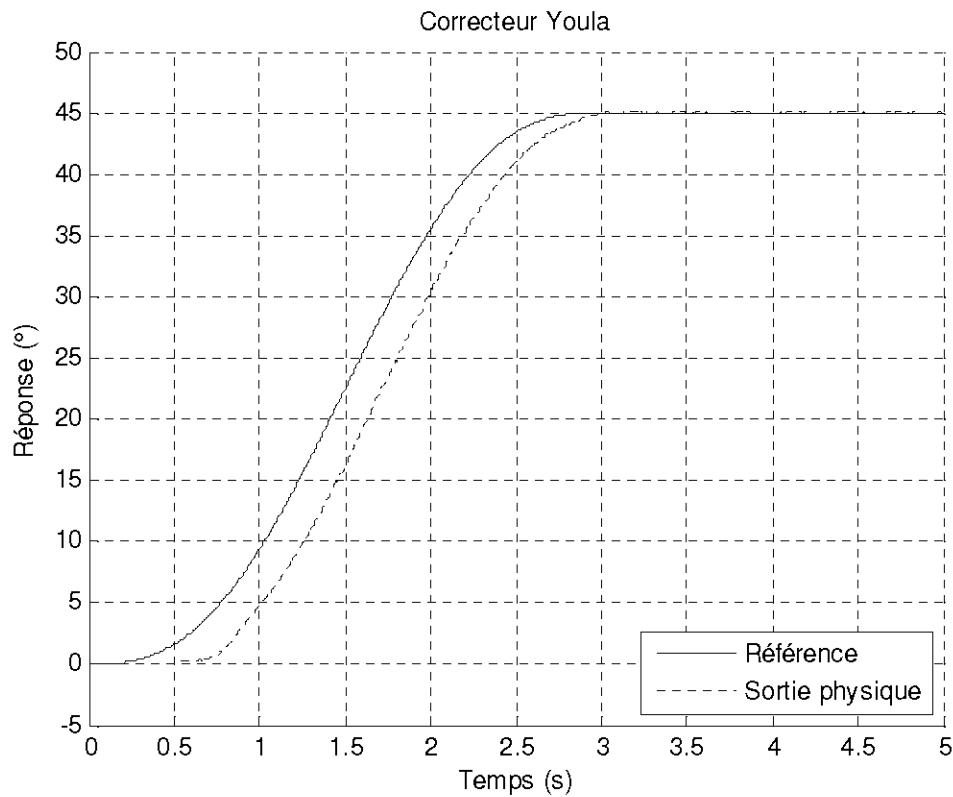


Figure 24: Résultats pratique - Youla

5.4. Analyse des résultats

D'abord, les résultats de simulation sont satisfaisants. Le temps de réponse est bon, la courbe suit bien la référence, avec un retard d'environ 0.25 secondes. Le fait d'avoir utilisé une référence graduelle a effectivement beaucoup aidé à avoir une réponse rapide, évitant les dépassements et les oscillations résiduelles.

Pour ce qui est de l'expérimentation, la réponse tout aussi satisfaisante, le temps de réponse est conforme aux simulations et l'erreur en régime permanent est nulle. Des oscillations minimales sont aussi présentes dans la section en régime permanent de la réponse, mais ont été expliquées dans les chapitres précédents.

Somme toutes, cette méthode est efficace et prometteuse; le choix de la fonction $Q(s)$ est donc primordial pour le succès de la méthode, et pourrait être approfondi dans le cadre d'une analyse subséquente.

CHAPITRE 6

MÉTHODE H-INFINI

La méthode H-infini est une autre méthode de commande optimale; elle permet d'identifier le correcteur stabilisant le système et offrant les performances adéquates en fonction de matrices de pondérations. Elle consiste à minimiser la norme infinie des sorties du système [15]. Ces sorties sont la sortie actuelle du bras flexible et les deux autres sorties ajoutées, l'erreur de poursuite et le signal de commande. Le schéma de contrôle de ce système est illustré à la figure 25.

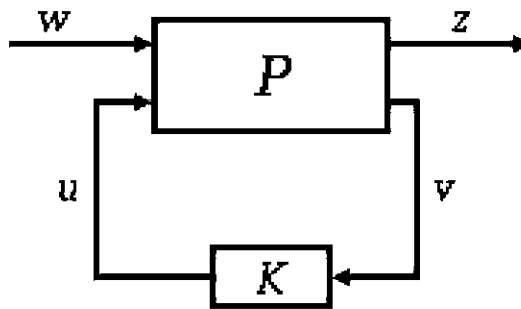


Figure 25: Schéma bloc du correcteur H-infini

En effet, dans ce schéma, l'entrée et la sortie du système étudié dans ce projet sont, respectivement, w et v . Le signal u est le retour et les sorties z sont, en fait, l'erreur de poursuite multipliée par son facteur de pondération, la commande multipliée par sa fonction de pondération et la sortie réelle du système, elle aussi pondérée [16].

Le vecteur à pondérer devient ainsi l'ensemble de ces sorties pondérées. Les paramètres à contrôler pour bien stabiliser le système sont donc les matrices de pondération, qui dictent les objectifs et leur assignent une importance.

Pour réaliser le contrôle du système en utilisant cette méthode, on définira d'abord les fonctions de transfert de pondération, avant de résoudre les deux équations de Riccati menant à la construction du correcteur.

6.1. Design du correcteur

Le système est illustré à la figure 26. On remarque que les trois sorties ajoutées lors de la modélisation ne font pas partie du retour d'état; en fait, elles servent à paramétrer le correcteur juste avant le système.

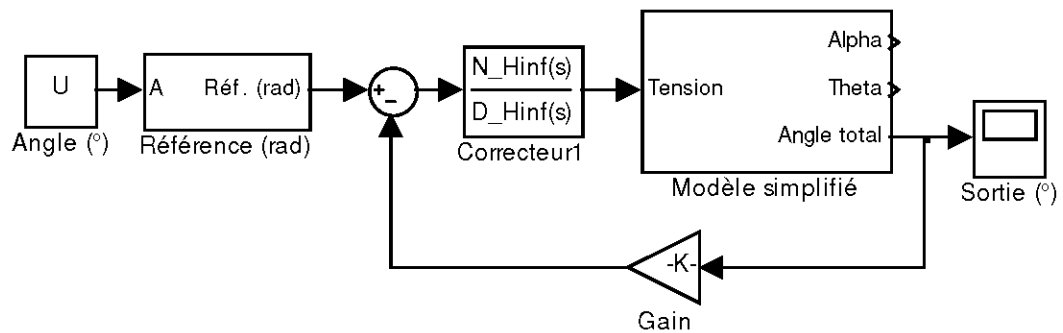


Figure 26: Montage simulation - H-infini

Les matrices de pondération sont choisies pour fixer chacun des paramètres. D'abord, la fonction de transfert pondérant l'erreur doit avoir un bon gain, car l'erreur de poursuite doit être nulle en régime permanent. La fonction choisie est donc:

$$W_1 = \frac{10}{10s + 0.001} = \frac{10000}{10000s + 1} \quad (6.1)$$

Pour ce qui est de la seconde fonction de pondération, qui dicte l'importance de l'effort de commande, un simple gain est suffisant. Comme l'énergie dépensée doit être minimisée mais que son optimisation est bien moins importante que l'annulation de l'erreur en régime permanent et des performances du système, un gain de 1.5 est suffisant:

$$W_2 = 1.5 \quad (6.2)$$

Pour la dernière fonction de pondération, celle de la sortie, il est judicieux d'imposer une fonction estompant les hautes fréquences (en limitant l'importance du bruit des capteurs dans l'optimisation de la commande). Un choix judicieux serait l'utilisation d'une fonction de transfert de second ordre. En imposant une fréquence naturelle de 25 rad/s, un coefficient d'amortissement de 1 et un gain en régime permanent de 2, on obtient:

$$W_3 = \frac{1250}{s^2 + 50s + 625} \quad (6.3)$$

Maintenant que ces fonctions de pondération sont déterminées, on crée le système augmenté incluant les nouvelles sorties; on obtient ainsi:

$$P(s) = \begin{bmatrix} W_1 & -W_1 G \\ 0 & W_2 \\ 0 & W_3 G \\ I & -G \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Cette équation satisfait à la formulation suivante:

$$\begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Ensuite, il est nécessaire de déterminer le système équivalent minimal de P, soit les matrices B, C et D, tel que:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u\end{aligned}\tag{6.6}$$

Les deux équations de Riccati suivantes sont résolues, pour obtenir les paramètres X_{inf} et Y_{inf} :

$$A^T X + XA + X(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T)X + C_1^T C_1 = 0\tag{6.7}$$

$$AY + YA^T + Y(\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2)Y + B_1 B_1^T = 0\tag{6.8}$$

Une itération est faite, à l'aide de Matlab, pour déterminer une bonne valeur de γ satisfaisant les conditions nécessaires suivantes pour assurer la stabilité du système:

$$X_{\infty} \geq 0 \quad Y_{\infty} \geq 0\tag{6.9}$$

Une fois cette itération réalisée, il est alors possible de créer le modèle d'état du correcteur, à partir de ces solutions et du système augmenté:

$$\begin{aligned}A_c &= A + (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T)X_{\infty} - (I - \gamma^{-2} Y_{\infty} X_{\infty})^{-1} Y_{\infty} C_2^T C_2 \\ B_c &= (I - \gamma^2 Y_{\infty} X_{\infty})^{-1} Y_{\infty} C_2^T \\ C_c &= -B_2^T X_{\infty}; \quad D_c = 0\end{aligned}\tag{6.10}$$

Avec les paramètres du modèle simplifié et les fonctions de pondération choisies plus tôt, le correcteur correspondant a les paramètres suivants:

<i>Zéros</i>	<i>Pôles</i>	<i>Gain</i>
-9.4146e+000 +2.5861e+001i	-5.6550e+001	284
-9.4146e+000 -2.5861e+001i	-9.3880e+000 +2.5829e+001i	
-2.5000e+001	-9.3880e+000 -2.5829e+001i	
-2.5000e+001	-2.5028e+001	
-1.5581e+001	-2.4972e+001	
-3.7766e-010 +9.2053e-005i	-1.5187e+001	
-3.7766e-010 -9.2053e-005i	-3.0578e+000	
	-1.0000e-004	

Comme pour la méthode de Youla, les zéros et les pôles égaux ou proches sont simplifiés pour obtenir un contrôleur moins complexe:

<i>Zéros</i>	<i>Pôles</i>	<i>Gain</i>
-1.5580e+001	-1.0000e-004	284
0	-3.0580e+000	
0	-1.5190e+001	
	-5.6550e+001	

6.2. Simulation

Pour simuler le système, le schéma illustré à la figure 26 est réalisé dans Simulink, en utilisant la même entrée que dans les autres chapitres. La sortie est affichée à la figure 27.

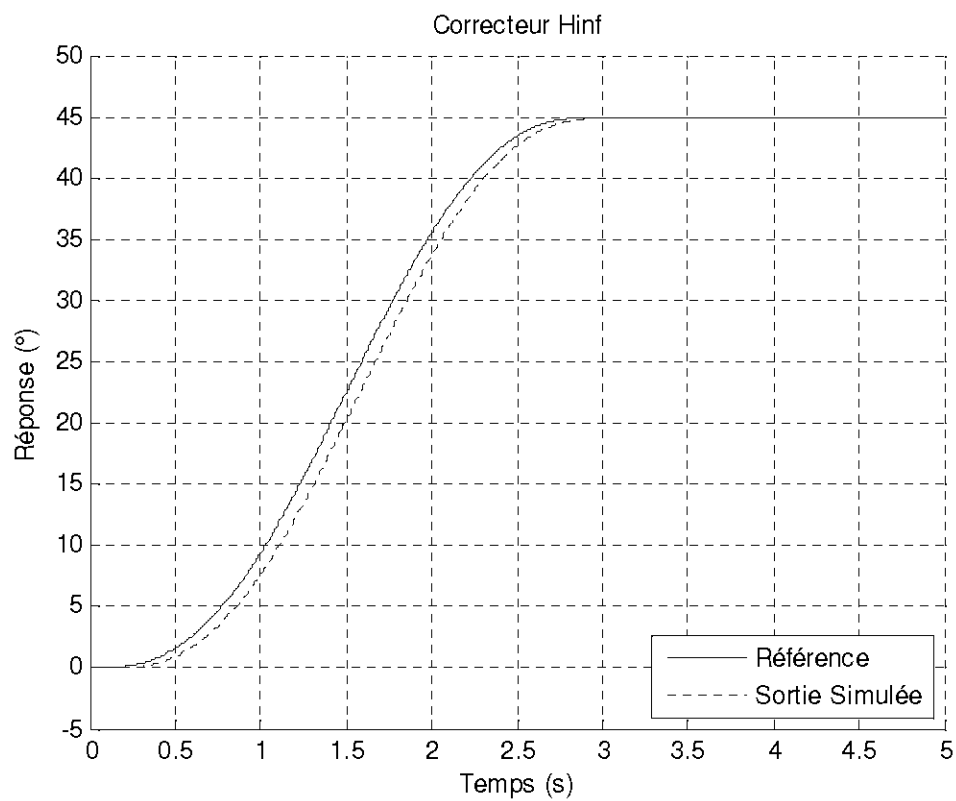


Figure 27: Résultats simulation - H-infini

6.3. Expérimentation

Le montage réalisé est illustré à la figure 28.

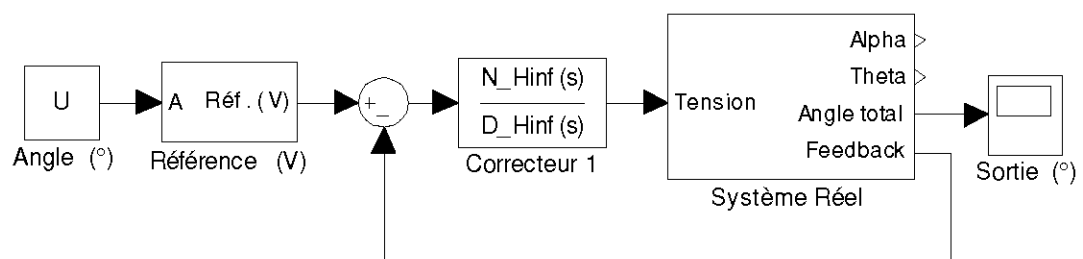


Figure 28: Montage pratique - H-infini

Après application du contrôleur sur le modèle réel, en appliquant la même entrée que pour les autres méthodes, les résultats obtenus sont illustrés à la figure 29.

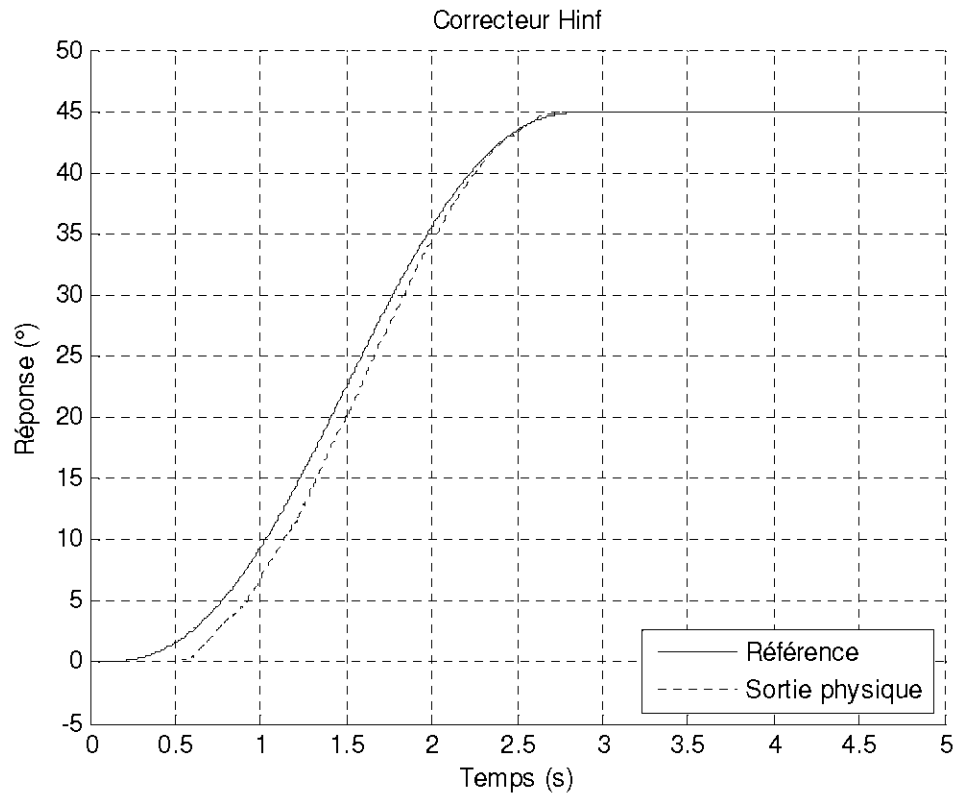


Figure 29: Résultats pratique - H-infini

6.4. Analyse des résultats

L'avantage de la méthode H-infini est qu'elle permet, par le contrôle de trois fonctions distinctes, d'agir séparément sur l'erreur en régime permanent, les performances et la consommation d'énergie.

Les résultats de simulation sont excellents; un temps de réponse court, une erreur en régime permanent nulle et aucune oscillation en régime permanent.

Ensuite, les résultats pratiques présentent eux aussi une erreur nulle en régime permanent. Le temps de réponse est court, la réponse suit de très près la consigne. De plus, aucun dépassement n'est présent, mais une petite oscillation résiduelle apparaît en régime permanent; elle a cependant été expliquée dans les analyses des chapitres précédents.

Il serait judicieux, dans le cadre de nouvelles analyses, de concevoir ce correcteur en utilisant une fonction W_1 différente de celle proposée dans ce projet. L'augmentation du gain de cette fonction devrait réduire encore plus le temps de réponse, jusqu'à un certain point.

Finalement, la différence entre les simulations et l'expérimentation est minime; les paramètres non-linéaires mis de côté lors de la modélisation n'affectent presque pas les résultats. La méthode démontre donc une robustesse envers cette incertitude.

CHAPITRE 7

THÉORIE DE LA PASSIVITÉ

La théorie de la passivité des systèmes sert à déterminer la stabilité des points d'équilibre. Cependant, elle peut aussi être utilisée pour définir un contrôleur qui, en boucle fermée, rend le système complet passif [17] (et cela, même s'il n'est pas passif en boucle ouverte).

Pour déterminer qu'un système est passif, une fonction d'énergie doit être choisie, définie positive. Exprimée en fonction des variables d'état, la dérivée de cette fonction, doit être négative. Ces conditions sont illustrées dans l'équation (7.1).

$$V(x) \geq 0; \quad \dot{V}(x) \leq 0 \quad (7.1)$$

Pour un système linéaire, il existe une démarche méthodique pour déterminer la matrice P validant les conditions de l'équation (7.1), en choisissant une matrice Q strictement positive. Une fois cette matrice choisie, il suffit de résoudre l'équation de Lyapunov suivante:

$$PA + A^T P = -Q \quad (7.2)$$

Un choix judicieux, pour la matrice Q , est la matrice identité. Strictement positive, elle contient plusieurs éléments nuls qui simplifient les équations de résolution. Cependant, et bien sûr, cela ne fonctionne que si la matrice A est strictement stable.

Rappelons qu'un système linéaire est stable si les pôles de sa fonction de transfert sont à parties réelles négatives. Par ailleurs, il est important de noter que la fonction

de transfert du système à bras flexible contient des zéros à partie réelle positive en utilisant l'extrémité du bras comme sortie.

On utilisera donc un correcteur pour rendre l'ensemble du système passif. Le critère du cercle de Nyquist sera utilisé pour paramétrer le contrôleur utilisé. De plus, cette approche est robuste aux perturbations des capteurs et à leurs non-linéarités[18].

7.1. Design du correcteur

Le principe de cette méthode de contrôle est illustré à la figure 30. Le bloc H représente le système à contrôler, et le ϕ représente le capteur [19]. Une boucle de retour et une sommation sont imbriquées autour du système et du capteur pour permettre de rendre passif le tout.

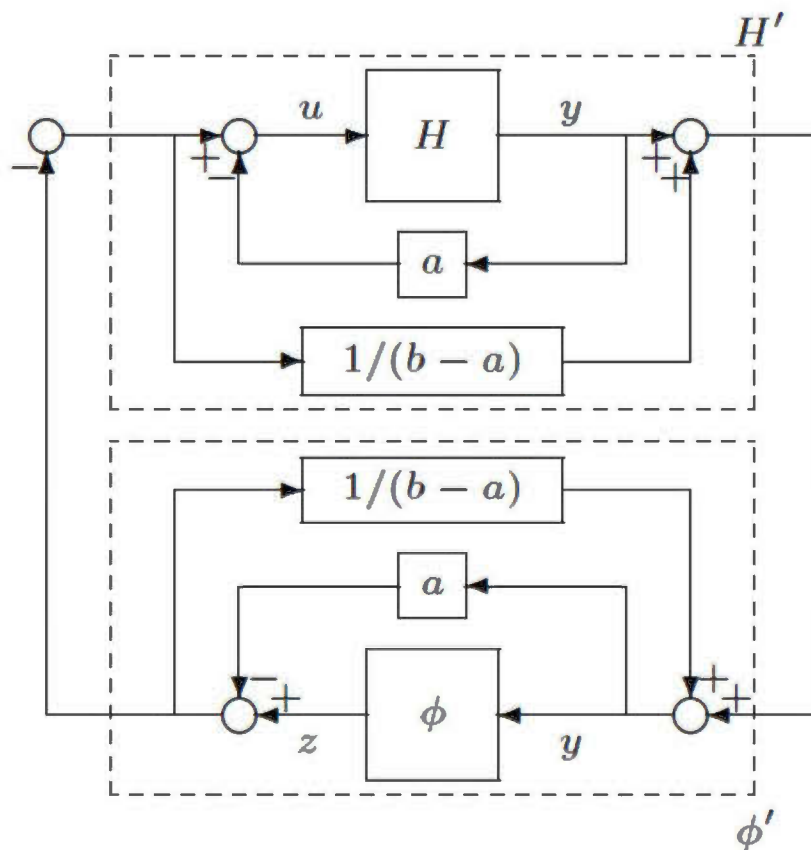


Figure 30: Schéma correcteur passivité

La fonction de transfert du système $H'(s)$ devient alors:

$$H'(s) = \frac{H(s)}{1 + aH(s)} + \frac{1}{b - a} \quad (7.3)$$

Pour que ce nouveau système devienne passif, cette fonction de transfert doit être stable. Pour s'assurer que le système corrigé soit stable, le graphe de Nyquist du système en boucle ouverte doit être, selon le choix des signes de a et de b , dans le cercle borné par $-1/b$, $-1/a$, ou à l'extérieur. Le graphe de Nyquist du modèle simplifié, en boucle ouverte, est illustré à la figure 31.

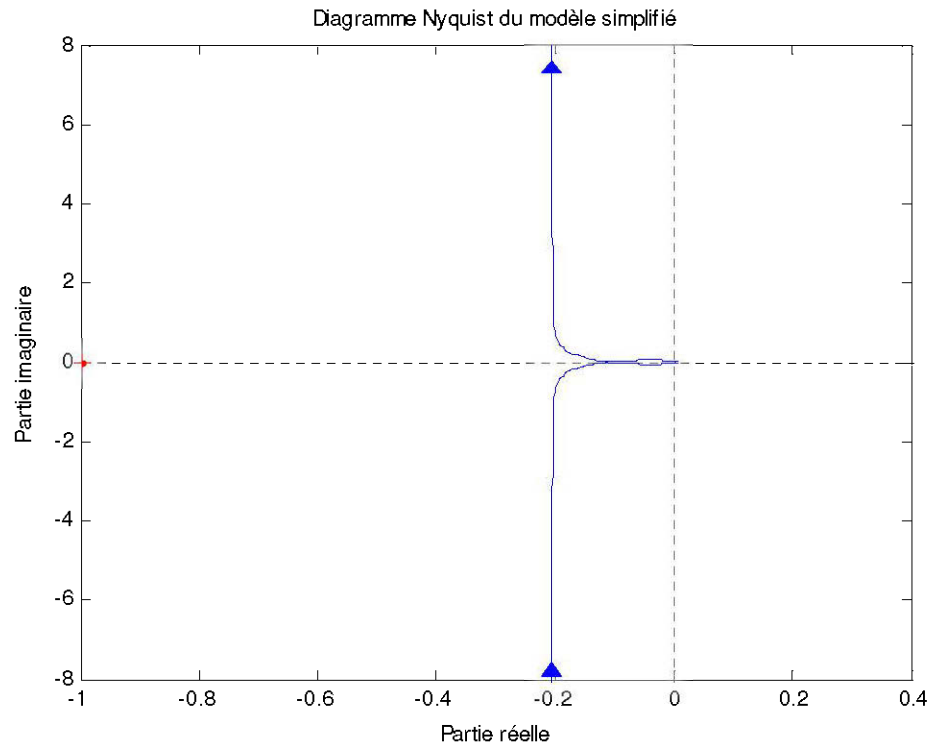


Figure 31: Diagramme de Nyquist du modèle simplifié

Pour obtenir de bons résultats, on doit sélectionner b plus grand que a . De plus, comme le diagramme de Nyquist tend vers l'infini du côté de l'axe imaginaire, il est

impossible de spécifier le diagramme de Nyquist à l'intérieur d'un cercle fini. Dans ce cas, a et b doivent être les deux positifs et plus petits que 5 (pour que $1/b$ et $1/a > 0.2$).

7.2. Simulations

Pour le contrôleur, les valeurs assignées à a et b sont d'abord:

$$a = 1; \quad b = 4 \quad (7.4)$$

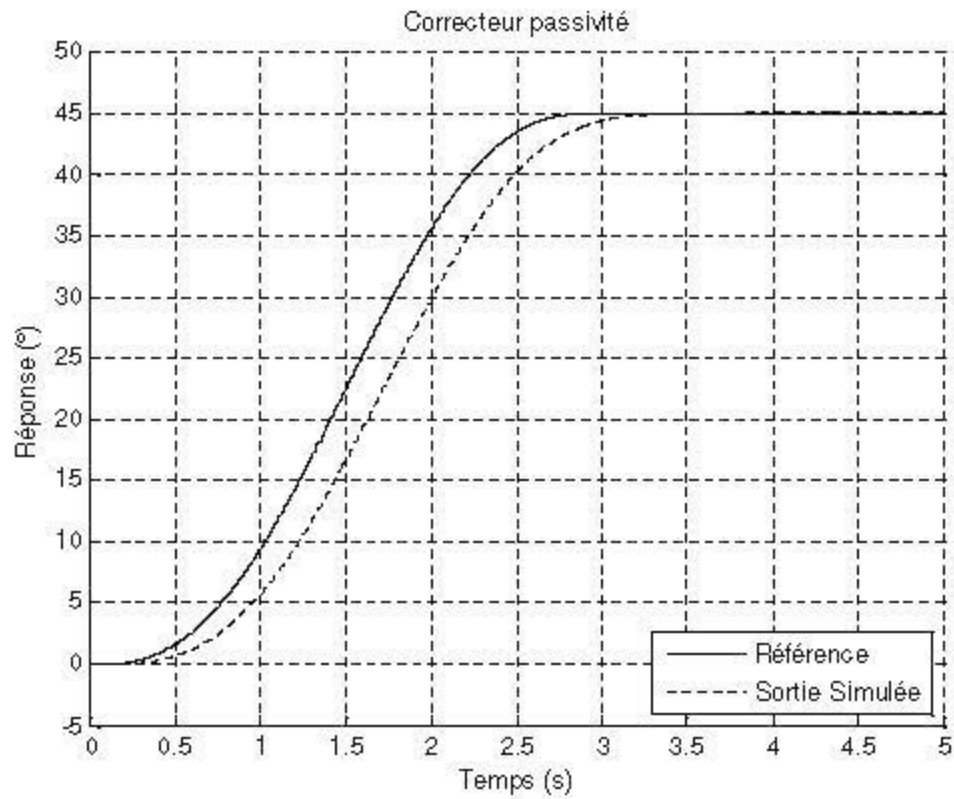


Figure 33: Résultats simulation - passivité

7.3. Expérimentation

L'expérimentation a été réalisée à l'aide du modèle (figure 34):

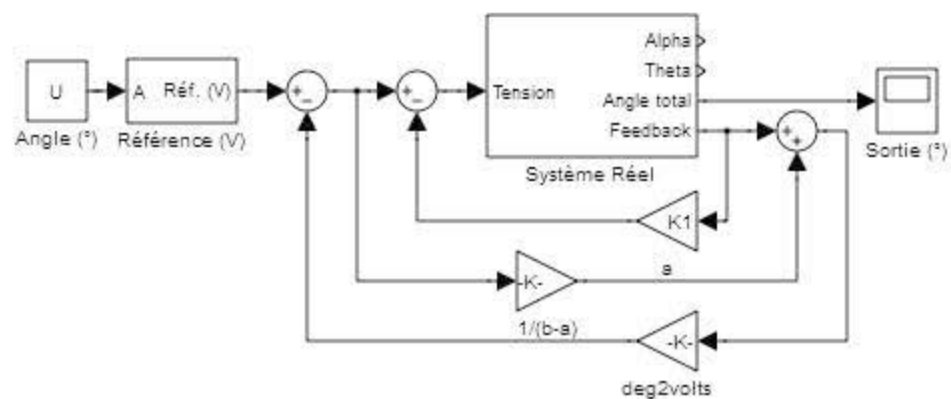


Figure 34: Montage pratique - passivité

Les essais ont été réalisés avec la même entrée que dans les chapitres précédents. Les résultats sont affichés à la figure 35:

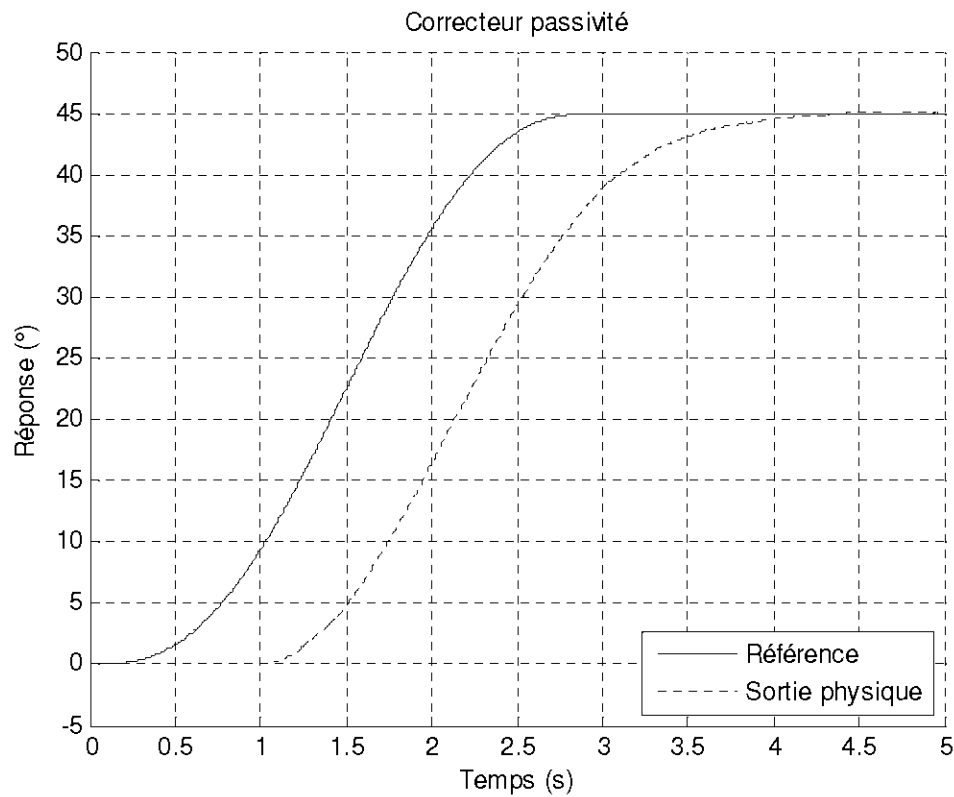


Figure 35: Résultats pratique - passivité

7.4. Analyse des résultats

D'abord, en analysant le résultat de la simulation, on remarque que l'erreur en régime permanent est nulle, ce qui est bien. Par contre, le temps de réponse est plus lent qu'avec les autres méthodes, même si ce n'est qu'en simulation. Cependant, ces résultats restent satisfaisants.

Pour ce qui est de l'expérimentation, la réponse est, encore une fois, satisfaisante; elle montre une erreur en régime permanent nulle, aucun dépassement, mais un temps de réponse plus long que les autres méthodes. On constate que la réponse suit de façon respectable la consigne jusqu'au moment où elle atteint sa valeur finale. À ce moment, la pente diminue plus rapidement que la consigne, résultant en un temps de réponse plus lent.

De petites oscillations résiduelles sont présentes à la fin, mais elles ont été expliquées dans les premiers chapitres.

Pour pousser l'analyse plus loin, il serait possible de faire varier les paramètres a et b du cercle, et de faire varier le temps de montée de la consigne pour voir jusqu'où il est possible d'aller sans exciter les hautes fréquences.

CHAPITRE 8

CONTRÔLE NON-LINÉAIRE

8.1. Définition des points d'équilibre

Pour identifier les points d'équilibre du système, il est nécessaire de déterminer les valeurs des variables d'état en régime permanent; c'est-à-dire en annulant leurs dérivées. À partir du système d'équations (2.50), on obtient :

$$\begin{aligned}
 0 &= \dot{x}_3 \\
 0 &= \dot{x}_4 \\
 0 &= 1875.7x_2 - 31.5x_3 + x_2x_3(0.98x_3 + 3.74x_4) + 55.4 * u \\
 0 &= -1621x_2 + 16.5x_3 + x_2x_3(-0.85x_3 - 1.96x_4) - 29 * u
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

Le vecteur solution est donc, en annulant l'entrée u et en solutionnant le système d'équation (8.1):

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8.2}$$

En effet, il est important de remarquer que la variable x_1 n'apparaît pas dans le système d'équations à l'équilibre. Il est en effet facile de prouver que l'angle à laquelle le système se stabilise est peu important, étant donné que le système est pris dans un plan horizontal. D'ailleurs, il est impératif que le système puisse être stabilisé à n'importe quel angle, soit n'importe quelle valeur de x_1 .

Il existe donc une infinité de positions qui permettent l'équilibre du système, mais toutes n'ont qu'une composante en x_1 .

8.2. Nature des points d'équilibre

Pour déterminer la nature des points d'équilibre, il est possible d'utiliser le Jacobien du système (on doit donc linéariser le système autour de ses points d'équilibre) [20]. Pour ce faire, on reprend les équations suivantes :

$$\begin{aligned} f_1 &= x_3 \\ f_2 &= x_4 \\ f_3 &= 1875.7x_2 - 31.5x_3 + x_2x_3(0.98x_3 + 3.74x_4) + 55.4 * u \\ f_4 &= -1621x_2 + 16.5x_3 + x_2x_3(-0.85x_3 - 1.96x_4) - 29 * u \end{aligned} \quad (8.3)$$

Le Jacobien s'exprime, en fonction des variables d'état x_1 à x_4 autour de x_0 :

$$A_{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1875.7 & -31.5 & 0 \\ 0 & -1621 & 16.5 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

Qui est en fait la matrice linéaire représentant la linéarisation du modèle non-linéaire autour du point d'équilibre x_0 . Les valeurs propres de ce système linéarisé autour du point d'équilibre sont donc :

$$\begin{aligned} &0 \\ &-8.4330 + 36.0941i \\ &-8.4330 - 36.0941i \\ &-14.6431 \end{aligned} \quad (8.5)$$

Étant donné que le modèle linéarisé autour du point d'équilibre présente un pôle à l'origine, et que les autres pôles sont stables (pôle stable ou foyer stable), l'état du système doit converger vers la droite des points d'équilibre, mais on ne peut prédire son comportement sur cette droite (l'axe x_1).

8.3. Étude de la dynamique interne

Pour étudier la dynamique interne du système, il est nécessaire, en premier lieu, d'établir une sortie. Comme ce qui nous intéresse c'est de stabiliser d'abord la déformation du bras flexible vers zéro, nous considérerons la sortie suivante :

$$y = x_2 = q_f \quad (8.6)$$

Qui est, en effet, le seul mode flexible du modèle. Si cette variable atteint la valeur de zéro, le bras flexible ne sera donc pas déformé. On procède donc ainsi :

$$\dot{y} = \dot{x}_2 = x_4 \quad (8.7)$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_4 = -1621x_2 + 16.5x_3 + x_2x_3(-0.85x_3 - 1.96x_4) - 29 * u \quad (8.8)$$

Comme la dérivée seconde de la sortie est la première dérivée dépendant de l'entrée, la dynamique d'entrée-sortie est de dimension 2 et il existe une dynamique interne d'ordre 2, puisqu'il s'agit d'un système d'ordre 4.

8.4. *Forme normale*

Pour approfondir l'analyse du modèle non-linéaire, il est intéressant de l'exprimer sous la forme normale [21], comme représentée par l'équation suivante:

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_i &= \xi_{i+1} \quad i = 1 \dots \rho - 1 \\
 \dot{\xi}_\rho &= b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)u \\
 \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) \\
 y &= \xi_1
 \end{aligned} \tag{8.9}$$

Le choix de la sortie impose que :

$$\xi_1 = x_2 \tag{8.10}$$

Par déduction, les variables suivantes sont aussi attribuées :

$$\xi_2 = x_4 \tag{8.11}$$

$$\eta_1 = x_1 \tag{8.12}$$

Une fois ces expressions remplacées dans le système d'équations (8.9), le système s'exprime ainsi:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\
\dot{\xi}_2 &= -1621\xi_1 + 16.5x_3 + \xi_1x_3(-0.85x_3 - 1.96\xi_2) - 29 * u \\
\dot{\eta}_1 &= x_3 \\
\dot{x}_3 &= 1875.7\xi_1 - 31.5x_3 + \xi_1x_3(0.98x_3 + 3.74\xi_2) + 55.4 * u
\end{aligned} \tag{8.13}$$

Pour qu'il n'y ait pas l'influence de l'entrée dans la dynamique interne, la seconde variable interne est choisie ainsi:

$$\eta_2 = x_3 + \frac{55.4}{29}x_4 \tag{8.14}$$

De cette façon, l'entrée u n'intervient pas dans l'équation de sa dérivée :

$$\dot{\eta}_2 = -1221x_2 + x_2x_3(-0.6438x_3) \tag{8.15}$$

Il suffit alors de déterminer l'expression de x_3 :

$$x_3 = \eta_2 - \frac{55.4}{29}\xi_2 \tag{8.16}$$

Une fois les équations (8.10) à (8.16) substituées dans le modèle non-linéaire du bras flexible, la forme normale est obtenue:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\
\dot{\xi}_2 &= -1621\xi_1 + 16.5\left(\eta_2 - \frac{55.4}{29}\xi_2\right) \\
&\quad - \xi_1\left(\eta_2 - \frac{55.4}{29}\xi_2\right)(0.85\eta_2 + 0.3362\xi_2) - 29u \\
\dot{\eta}_1 &= \eta_2 - \frac{55.4}{29}\xi_2 \\
\dot{\eta}_2 &= -1221\xi_1 - 0.6438\xi_1\left(\eta_2 - \frac{55.4}{29}\xi_2\right)^2
\end{aligned} \tag{8.17}$$

Ce système est donc sous la forme normale. Il est alors possible d'associer au système d'équation (8.9) les paramètres qui correspondent au modèle non-linéaire de la membrure flexible:

$$\begin{aligned}
b(\xi, \eta) &= -1621\xi_1 + 16.5\left(\eta_2 - \frac{55.4}{29}\xi_2\right) \\
&\quad - \xi_1\left(\eta_2 - \frac{55.4}{29}\xi_2\right)(0.85\eta_2 + 0.3362\xi_2)
\end{aligned} \tag{8.18}$$

$$a(\xi, \eta) = -29 \tag{8.19}$$

$$q_1 = \eta_2 - \frac{55.4}{29}\xi_2 \tag{8.20}$$

$$q_2 = -1221\xi_1 - 0.6438\xi_1\left(\eta_2 - \frac{55.4}{29}\xi_2\right)^2 \tag{8.21}$$

8.5. Dynamique des zéros

Maintenant que le système est sous sa forme normale, il est possible d'examiner la dynamique des zéros, qui est en fait le comportement de la dynamique interne du système. Dans les équations précédentes, elle est représentée par les variables d'états η_i . L'étude de la dynamique des zéros revient donc à poser les variables externes à zéro, et d'analyser les équations des variables internes pour évaluer la stabilité des points d'équilibre. Cette dynamique s'exprime donc, de façon générale, comme suit:

$$\dot{\eta} = q(\eta, 0) \quad (8.22)$$

Pour le bras flexible, ces équations sont donc:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (8.23)$$

La dynamique des zéros (soit la dynamique interne à l'origine) n'est donc pas asymptotiquement stable au point d'équilibre ($\eta_2 = 0$), ce qui démontre que le système est un non-minimum de phase. Ceci implique qu'un des zéros du système linéarisé tangent est à partie réelle positive. De plus, ceci implique, dans la réponse du système, que cette dernière croise au moins 2 fois l'axe des abscisses, et qu'elle commence avec une valeur négative.

8.6. Fonction de Lyapunov assignable

La méthode de contrôle par la fonction de Lyapunov assignable consiste à prendre une fonction V étant un candidat de Lyapunov (c'est-à-dire qui est strictement positive en d'autres points qu'à l'origine) [22]. Il faut ensuite exprimer

l'équation de sa dérivée, qui doit nécessairement être fonction de l'entrée. Finalement, le choix de l'expression qui dépend de l'entrée est fait pour qu'elle rende la dérivée de cette fonction strictement négative, ce qui assure la stabilité du système commandé selon Lyapunov. Pour cette section, le modèle choisi est le modèle non-linéaire sous sa forme de base (celle en x), rappelée à l'équation (8.24):

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_3 \\
 \dot{x}_2 &= x_4 \\
 \dot{x}_3 &= 1875.7x_2 - 31.5x_3 + x_2x_3(0.98x_3 + 3.74x_4) + 55.4 * u \\
 \dot{x}_4 &= -1621x_2 + 16.5x_3 + x_2x_3(-0.85x_3 - 1.96x_4) - 29 * u
 \end{aligned} \tag{8.24}$$

La fonction candidate de Lyapunov choisie dépend de l'erreur de la sortie du système; elle est exprimée à l'équation (8.25):

$$V = (\varepsilon + x_3 + x_4)^2 \quad \text{avec } \varepsilon = y - y_d = \theta + \frac{q_f}{L} - y_d \tag{8.25}$$

À l'aide du théorème de la dérivée en chaîne, la fonction candidate est dérivée par rapport au temps (cette fonction devra être strictement négative une fois la sortie choisie):

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & 2 * (\varepsilon + x_3 + x_4) * (x_3 + x_4/L + \\
& +(1875.7x_2 - 31.5x_3 + x_2x_3(0.98x_3 + 3.74x_4) + 55.4 * u) \\
& +(-1621x_2 + 16.5x_3 + x_2x_3(-0.85x_3 - 1.96x_4) - 29 * u)
\end{aligned} \tag{8.26}$$

Il est donc possible de rendre strictement négative cette fonction, en définissant la commande à l'aide de cette équation:

$$\begin{aligned}
-k(\varepsilon + x_3 + x_4) = & (x_3 + x_4/L + \\
& (1875.7x_2 - 31.5x_3 + x_2x_3(0.98x_3 + 3.74x_4) + 55.4 * u) + (-1621x_2 \\
& + 16.5x_3 + x_2x_3(-0.85x_3 - 1.96x_4) - 29 * u)
\end{aligned} \tag{8.27}$$

De cette façon, la sortie est choisie ainsi:

$$\begin{aligned}
u = & \frac{-k\varepsilon + (14 - k)x_3}{26.4} \\
& -254.7x_2 \frac{-(k + 2.44)x_4 - x_2x_3(0.13x_3 - 1.78x_4)}{26.4}
\end{aligned} \tag{8.28}$$

8.7. Simulations et analyse des résultats

Pour simuler le système non-linéaire, il a fallu utiliser la fonction « S-function » de simulink, qui permet d'entrer des équations plus complexes (comme des portions non-linéaires) dans les équations régissant le système, soit celles des dérivées des variables d'état. Une fois cela implanté, il a été possible de simuler le système non-linéaire (avec 1 mode flexible), en utilisant la sortie comme étant le mode de déformation du bras seulement ($x_2 = q_f$). Voici la réponse à l'échelon du modèle avec une telle sortie:

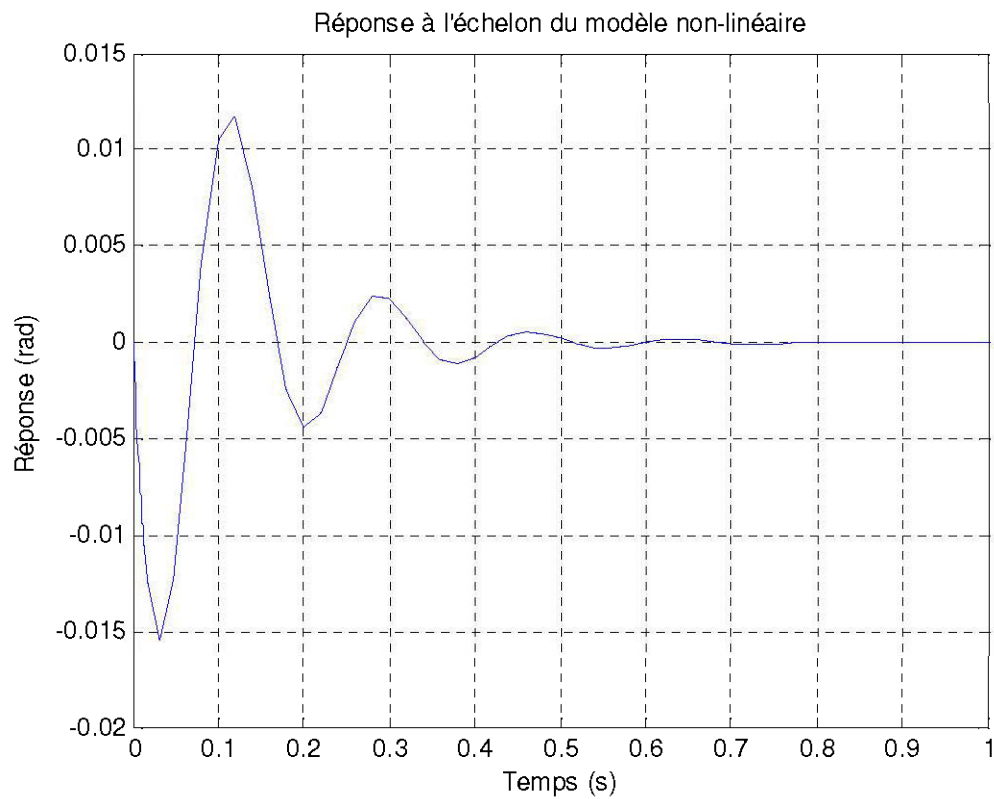


Figure 36: Résultats simulation modèle non-linéaire

Comme illustré à la figure 36, la variable d'état du mode flexible, linéairement proportionnelle à l'angle de déformation de la membrure flexible, oscille autour de zéro pour une entrée échelon (en boucle ouverte, c'est-à-dire avec la membrure flexible tournant à vitesse constante). Cette réponse est d'ailleurs comparable aux graphiques obtenus pour une sortie semblable (α) lors de l'identification (figure 7).

Fonction de Lyapunov assignable

Pour ce qui est de la fonction de Lyapunov assignable, le correcteur défini plutôt est inséré en série avec le modèle, le tout dans une boucle feedback, avec une entrée échelon. Le montage est illustré à la figure 37, et le gain k est pris égal à 1.

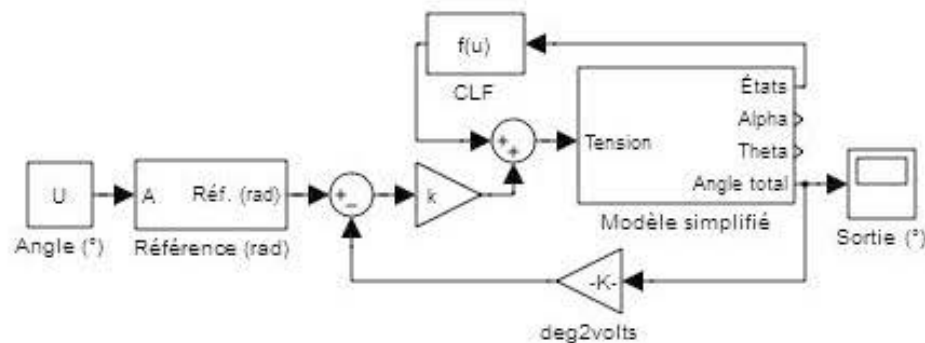


Figure 37: Montage simulation - Lyapunov

Les résultats de cette simulation sont illustrés à la figure 38. Ces résultats sont satisfaisants car l'erreur en régime permanent est nulle et le temps de réponse est relativement faible.

Il est cependant important de mentionner qu'une condition peut être rajoutée, à l'entrée du correcteur, pour exclure le cas où le dénominateur serait nul. De cette façon, il évitera toute divergence possible (même si, pour cette situation, cela n'est pas nécessaire).

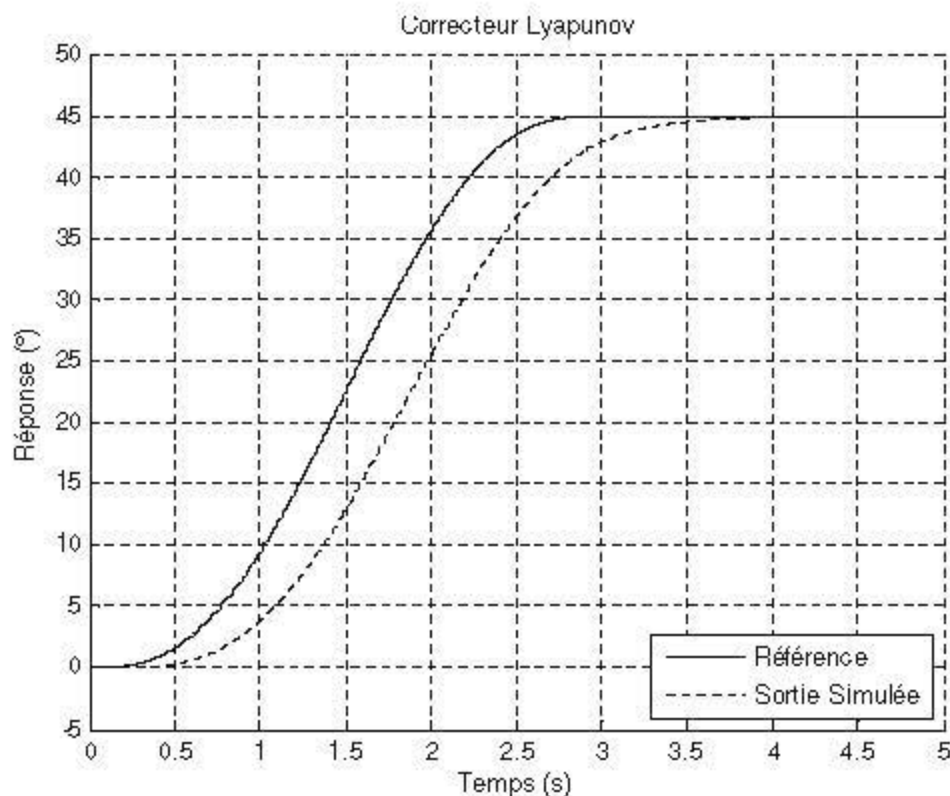


Figure 38: Résultats simulation - Lyapunov

8.8. Résultats expérimentaux

Le modèle présenté à la figure 39 a été utilisé pour effectuer les essais avec le contrôleur fonction de Lyapunov assignable. Les gains $K1$ et $K2$ sont, respectivement, de $-1/26.4$ et $1/26.4$.

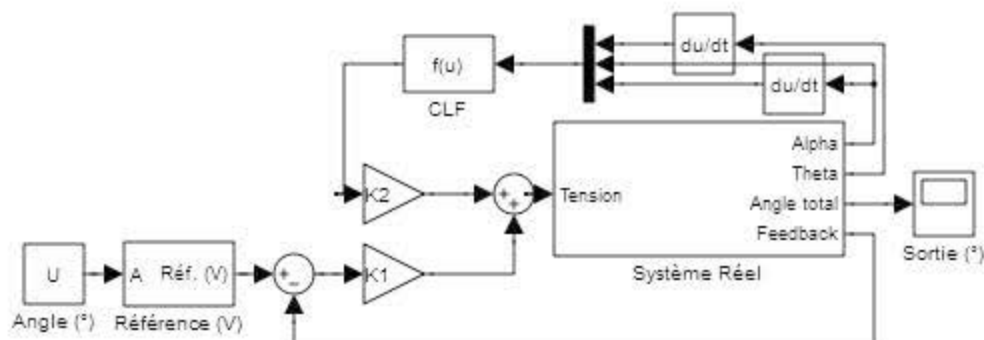


Figure 39: Montage pratique - Lyapunov

La fonction CLF, multipliée par le gain K2, représente l'expression de la commande (en excluant le terme dépendant de l'erreur). Le gain K1 multiplie l'erreur et la somme de ces deux signaux fait la commande. La figure 40 illustre les résultats obtenus pour la même entrée que les autres méthodes:

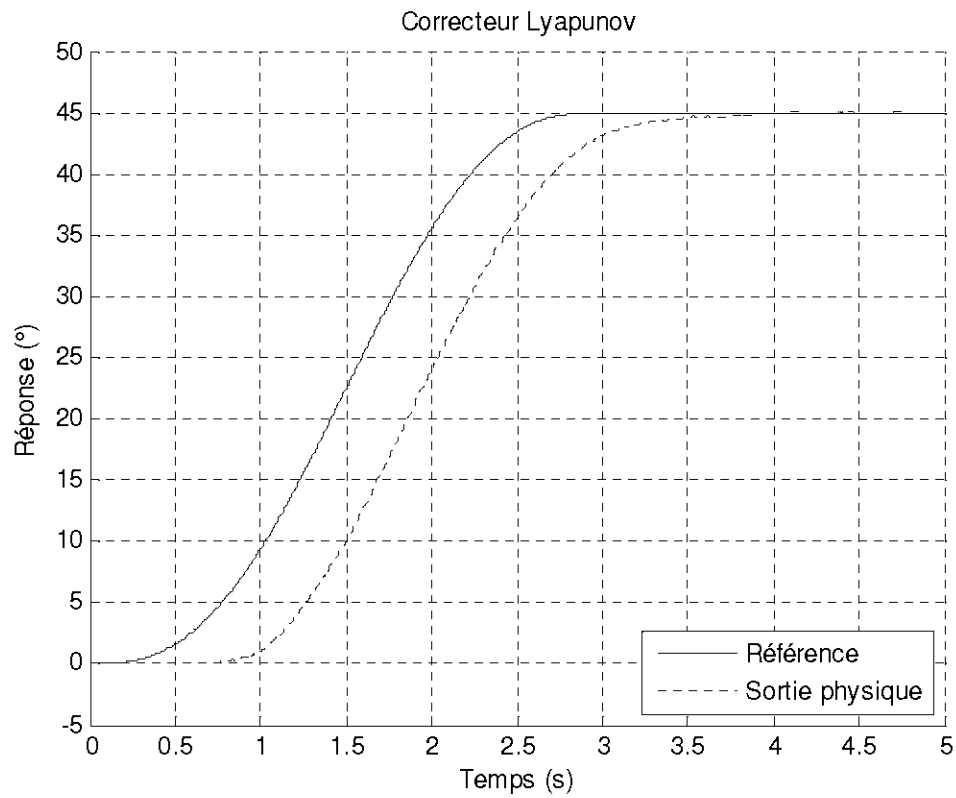


Figure 40: Résultats pratique - Lyapunov

8.9. Analyse des résultats

D'abord, les résultats en simulation sont satisfaisants. L'erreur en régime permanent est nulle, le temps de réponse est court et il n'y a pas de dépassement, ni d'oscillation résiduelle en régime permanent.

Pour ce qui est des résultats pratiques, la méthode met un certain temps avant de commencer à corriger; en effet, près d'une seconde s'écoule entre la montée de la référence et celle de la réponse. Cependant, l'écart se rapetisse pendant la montée pour afficher un temps de réponse d'environ 0,5 secondes.

Juste avant le régime transitoire, on remarque une décélération trop rapide de la réponse, qui forme sur le graphique une bosse. En effet, il semblerait que lorsque le bras ralentit, l'angle de déformation lui continue d'augmenter au même rythme pendant un bref instant. Étant donné que le gain le multipliant est élevé, cela crée un ralentissement trop prononcé de la réponse. Il serait donc intéressant de tenter de diminuer ce gain pour en voir les effets.

On remarque aussi les petites oscillations résiduelles dans le régime permanent de la réponse, comme pour les autres méthodes. Ces oscillations ont été expliquées dans les premiers chapitres.

Pour conclure, on pourrait aussi tenter de contrôler le système en assignant d'autres fonctions de Lyapunov et ainsi comparer les résultats obtenus. Cependant, cette recherche est fastidieuse et demande en soi beaucoup de temps. On pourrait aussi développer la méthode avec plus d'un mode flexible; cependant la portion non-linéaire se complexifie grandement avec l'ajout d'autres modes.

CHAPITRE 9

COMPARAISON DES MÉTHODES

La figure 41 illustre les réponses générées par le système physique, corrigé par tous les correcteurs utilisés lors de ce travail; elle sera donc fort utile pour comparer les résultats obtenus entre eux.

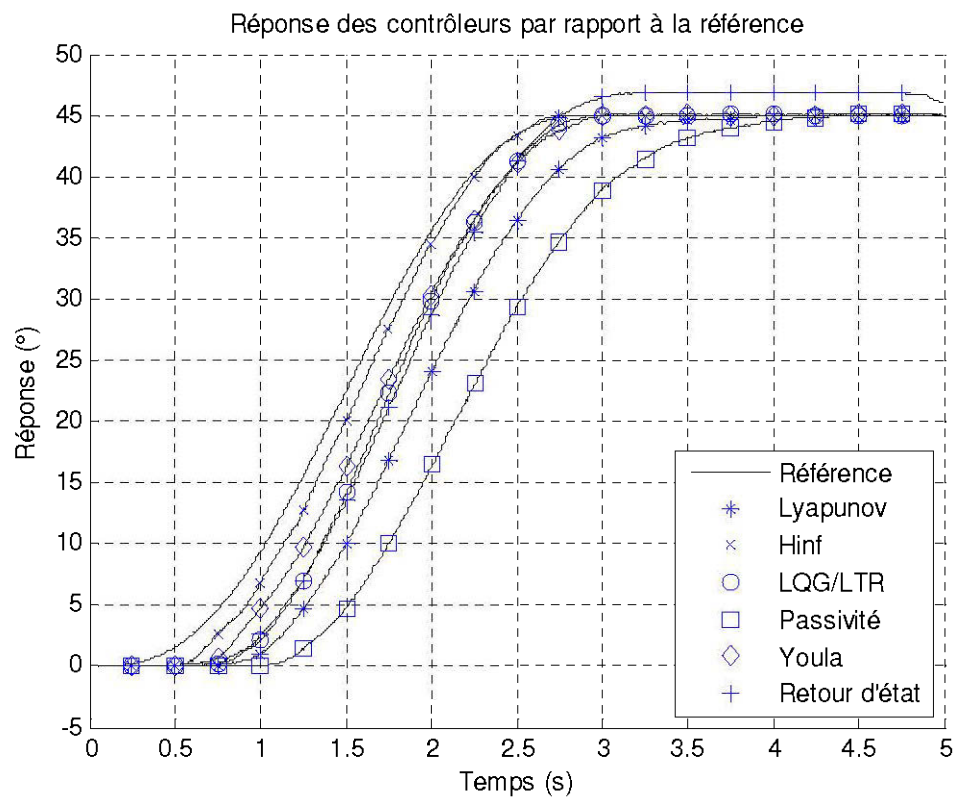


Figure 41: Résultats pratique avec tous les contrôleurs

9.1 *Temps de réponse*

En considérant le temps de réponse, le contrôleur conçu à l'aide du concept de passivité montre les moins bons résultats. En effet, il est le seul à afficher un temps de réponse de plus d'une seconde. Mis à part cette méthode, les temps de réponses des autres correcteurs sont semblables, et très satisfaisants. Le contrôleur H infini se démarque un peu du lot, mais la différence avec les autres méthodes est petite.

9.2 *Dépassement*

Pour ce qui est du dépassement, aucun des correcteurs appliqué n'en présente. Cependant, le choix du signal d'entrée y est pour quelque chose. En utilisant un signal lisse et présentant un temps de montée suffisamment long, on évite d'exciter les hautes fréquences. Le système est donc moins enclin à osciller autour de sa valeur finale.

9.3 *Erreur en régime permanent*

Un seul contrôleur présente une erreur en régime permanent, et c'est le contrôleur par retour d'état. Cependant, son erreur n'est que d'un degré, ce qui représente une erreur de 2,22%, ce qui est très faible.

9.4 *Performances en régime permanent*

Toutes les méthodes présentent la même oscillation résiduelle, soit les petites vibrations discutées plus tôt. On rappelle qu'à cause des contraintes physiques du montage (jeu entre les engrenages), il y a un petit délai et une tolérance sur le positionnement du bras, qui rend très ardu de corriger ces déplacements très faibles du bras.

9.5 *Résumé*

Toutes les méthodes examinées lors de ce projet présentent un bon potentiel; cependant, on remarque que le contrôleur H infini est un peu plus rapide que les

autres, et que le contrôleur conçu avec la passivité, ainsi que celui avec la fonction de Lyapunov assignable, sont plus lent. Le tableau trois récapitule les données discutées dans ce chapitre:

Tableau 3: Performances des correcteurs étudiés

Méthode	Temps de réponse (s)	Dépassement (%)	Erreur en régime permanent (%)
LQG/LTR	0,25	0	0
Retour d'état	0,5	0	2,22
Youla	0,25	0	0
H infini	0,10	0	0
Passivité	1,5	0	0
Lyapunov assignable	0,75	0	0

CONCLUSION

Dans le cadre de ce projet, les trois modèles, soit le modèle simplifié, le modèle par modes supposés ainsi que le modèle non-linéaire ont été développés et validés, puis ont servi à développer les correcteurs des différentes méthodes. Une fois ces correcteurs conçus, ils sont d'abord simulés pour en ajuster les paramètres une première fois. Ensuite, ils ont été appliqués sur le module concret avant d'être ajustés une dernière fois. Finalement, la comparaison des différentes méthodes a été faite et des pistes pour perfectionner les différents correcteurs ont été données, à titre de point de départ pour d'éventuelles expériences de raffinement.

Les résultats obtenus sont satisfaisants; la méthode H_∞ présente la meilleure réponse, avec un temps de réponse court et une erreur en régime permanent nulle. Sa composition et ses trois fonctions de pondérations est certainement la clé de ce succès. La méthode LQG/LTR et celle de Youla présentent, elles aussi, d'excellents résultats, cependant leurs temps de réponse sont un peu lent. Le contrôle par retour d'état présente, quant à lui, un temps de réponse un peu plus long, et une petite erreur en régime permanent. Le contrôleur défini à l'aide de la passivité, ainsi que celui réalisé avec une fonction de Lyapunov assignable, ne présentent pas de dépassement ni d'erreur en régime permanent, mais montrent des temps de réponse plus longs que les autres méthodes.

Pour conclure, les méthodes linéaires ainsi que leur modèle semblent la voie à prendre pour obtenir les meilleurs résultats. Les termes non-linéaires négligés ne semblent pas poser de problèmes. Il serait intéressant d'étudier l'impact du choix de la fonction Q dans la paramétrisation de Youla sur les performances du bras flexible, ainsi que l'influence des fonctions de pondération de la méthode H_∞ et l'importance du choix de la fonction de Lyapunov assignable.

RÉFÉRENCES

1. Chang, LW & Gannon, KP. (1990). *A Dynamical Model on a Single-Link Flexible Manipulator*. Journal of vibration, acoustics, stress, and reliability in design. Naval Postgraduate School, Unites States of America. Vo. 112. 1. 138-143.
2. Cannon, R., Jr. & Schmitz, E. (1984). *Initial experiments on the End-Point Control of a Flexible One-Link Robot*. The International Journal of Robotics Research, 3, 62-75. doi:10.1177/027836498400300303
3. Yang, J. H., Lian, F.-L. & Fu, L. C. (2002). *Nonlinear adaptive control for flexible-link manipulators*. IEEE Robotics and Automation Society.. Vol. 13, 1. 140-148. doi: 10.1109/70.554355
4. Meressi, T. & Paden, B. (1994). *Gain scheduled H-infinity controllers for a two link flexible manipulator*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. Vol. 17, 3. 537-543.
5. Shung, I. & Vidyasagar, M. (1987). *Control of a flexible robot arm with bounded input: Optimum step responses*. Robotics and Automation Proceedings. Vol. 4, 916-922. DOI 10.1109/ROBOT.1987.1087867
6. Freeman, R. A. & Primbs, J. A. (1996). *Control Lyapunov Functions: New Ideas From an Old Source*. IEEE. 35. 3926-3931.
7. Quanser (2008). *Rotary Motion Servo Plant SRV02 Flexible Link - User Manual* (Revision 1.0).
8. Lalami, A. (2011). *Logiciel Simulation et Identification de Paramètres des Systèmes Dynamiques*, UQAT.

9. Pinto, V.P. & Campos, J.C.T. (2011). *Robustness and Performance Analysis for the Linear Quadratic Gaussian/Loop Transfer Recovery with Integral Action Controller Applied to Doubly Fed Induction Generators in Wind Energy Conversion Systems*. Electric Power Components and Systems. Vol. 40. 2. 131-146. doi: 10.1080/15325008.2011.629331

10. Lertpiriyasuwat, V., Berg, C. B. & Buffinton, K. W. (2000). *Extended Kalman Filtering Applied to a Two-Axis Robotic Arm with Flexible Links*. The International Journal of Robotics Research. 19, 254-270. doi:10.1177/02783640022066851

11. Chen, B. M., Saberi, A. & Sannuti, P. (1992). *Loop Transfer Recovery For General Nonminimum Phase Non-Strictly Proper Systems*. Control-Theory and Advanced Technology, Mita Press, Vol. 8, 1, 101-144.

12. Doyle, J., Francis, A (1990). *Feedback Control Theory*. Macmillan Publishing Co.

12. Sanz, A. and Etxebarria, V. (2007). *Experimental control of a single-link flexible robot arm using energy shaping*. International Journal of Systems Science, 38: 1, 61-71. doi: 10.1080/00207720601014255

13. Quirin, D. (2009). *Optimization of SISO and MIMO systems using the Youla Parametrization*. Dublin City University - Centre for High Speed Devices and Systems.

14. Clement, B., Hbaïeb, S., Duc, G. & Font, S. (2000). *Application à la commande robuste par optimisation convexe*. Journal Européen des Systèmes Automatisés, 1-15.

15. Fu, M. (1991). *Interpolation approach to H^∞ estimation and its interconnection to loop*. Systems & Control Letters, North-Holland, Vol. 17, 29-36.
16. Ho, M.-T. & Tu, Y.-W. (2006). *Position control of a single-link flexible manipulator using H_∞ based PID control*. The Institution of Engineering and Technology, Vol. 153-5, 615-622.
17. Ortega, R., van der Schaft, A., Mareels, I. & Maschke., B. (2001). *Putting energy back in control*. IEEE Control Systems, Vol. 21, 18-33
18. Ortega, R., van der Schaft, A., Mareels, I. & Maschke., B. (2002). *Interconnection and damping assignment passivity-based control of portcontrolled Hamiltonian systems*. Automatica. Vol. 38, pp. 585-596.
19. Rodríguez, H. & Ortega, R. (2003). *Stabilization of electromechanical systems via interconnection and damping assignment*. Journal of Robust and Nonlinear Control. Vol. 13,. 1095-1111.
20. Slotine, J.-J., Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*. Massachusetts Institute of Technology. Prentice Hall, United States of America
21. Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, United States of America
22. Sontag, E. D. (1983). *A Lyapunov-like characterization of asymptotic controllability*. SIAM J. Contr. Optimiz. vol. 21, no. 3, 462-471
23. Saad, M. (2003). *Modélisation et passivité d'un système à un bras flexible*, Thèse de doctorat, École polytechnique de Montréal, 202 p.